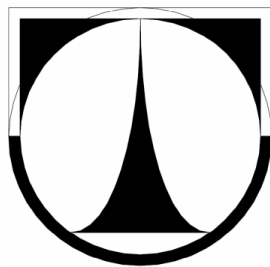


TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní



Liberec 2007

Jiří Pánek

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

Fakulta strojní

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

obor: Aplikovaná mechanika

zaměření: Inženýrská mechanika

Jiří Pánek

Stanovení mechanických vlastností pryže při zvýšených teplotách

Determination of the temperature dependent mechanical properties
of black filled rubber

Diplomová práce

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Bohdana Marvalová, CSc.

2007

ANOTACE

Předmětem práce je stanovení závislosti mechanických vlastností pryže na teplotě v rozmezí teplot 20 až 100°C.

Experimentálně je stanovena teplotní závislost modulu pružnosti, teplotní roztažnosti a reologické vlastnosti pryže při vyšších teplotách. Numericky pomocí MKP je určen čas nutný k prohřátí vzorku, za předpokladu ideálního přestupu tepla. Po navýšení o odpor při přestupu tepla je tento čas experimentálně ověřen. Je navržen viskoelastický model, který popisuje reologické chování pryže za zvýšených teplot. Tento model je použit při simulaci zatížení pryžového bloku pomocí MKP.

Klíčová slova: pryž, hyperelastický materiál, zvýšené teploty, viskoelastická, relaxace.

ANNOTATION

The aim of this thesis is the determination of the temperature dependent mechanical properties of black filled rubber in temperature range from 20 to 100 °C.

The temperature dependence of elastic modulus, temperature expansion and rheological properties of rubber at elevated temperature are determined experimentally. The time necessary for heating-up the sample in conditions of ideal heat transfer is calculated by FEM. The time of heating is experimentally verified. The viscoelastic material model describing rheological behavior at elevated temperatures is determined. The model is used for FE simulation of rubber sample.

Keywords rubber, hyperelastic material, temperature, viscoelasticity, relaxation, elevated temperatures

PROHLÁŠENÍ

Byl jsem seznámen s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č.121/2000 o právu autorském, zejména § 60 (školní dílo).

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

V Liberci dne 25. května 2007

Jiří Pánek

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat zejména vedoucí mé diplomové práce paní doc. Ing. Bohdaně Marvalové, CSc. za odborné vedení mé práce, paní Ing. Marii Vítové za pomoc při experimentech v laboratoři KSR. Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům za celoživotní podporu za každé okolnosti. Bez této pomoci bych svojí diplomovou práci nedokončil.

OBSAH

Seznam obrázků	7
Seznam tabulek	7
Seznam grafů	8
Přehled označení veličin	10
1 Úvod.....	12
1.1 Zkoušený materiál BAE 8534	14
2 Termodynamické principy	16
2.1 Základy statistické teorie termodynamiky	17
2.1.1 Fyzické předpoklady deformace	17
2.1.2 Elasticita síť molekul	18
2.1.3 Entropie jednoho řetězce	19
2.2 Fenomenologický přístup mechaniky kontinua	22
2.2.1 Zákony zachování	22
2.2.2 Hyperelastický materiál.....	25
2.2.3 Nestlačitelný hyperelastický materiál.....	26
2.2.4 Termoelastický materiál	27
2.2.5 Kalorimetrie	28
2.2.6 Navržení funkce volné energie $\psi(F, \theta)$ pro termoelastický materiál.....	29
3 Materiálový model	32
3.1 Teplotní roztažnost pryže	32
3.2 Navržený termoelastický model pryže	32
3.3 Viskoelastický model.....	35
4 Experiment	39
4.1 Zkušební vzorky materiálu BAE 8534	39
4.2 Metodika experimentů	39
4.2.1 Experimentální zařízení.....	39
4.2.2 Postup měření	40

4.3	Omezení Mullinsova jevu pomocí cyklického zatížení	41
4.3.1	Obnovení účinku Mullinsova jevu v čase	41
4.3.2	Cyklické testy ostatních vzorků	43
4.4	Relaxační testy.....	45
4.5	Měření při teplotě 20°C	46
4.6	Měření při teplotě 40°C	49
4.7	Měření při teplotě 80°C	53
4.8	Měření při teplotě 100°C	56
4.9	Zkoušky teplotní roztažnosti.....	60
5	Zpracování naměřených dat, určení konstant modelu	61
5.1	Formát experimentálních dat, úprava před výpočtem.	61
5.2	Určení součinitele teplotní roztažnosti α	63
5.3	Určení měrné tepelné kapacity c	63
5.4	Určení součinitele tepelné vodivosti λ	64
5.5	Určení hustoty ρ	64
5.6	Stanovení minimální doby ohřevu.....	64
5.7	Určení parametrů použitého neo-Hookeova modelu	65
5.8	Určení parametrů reologického modelu	69
6	Simulace v MKP	72
6.1	Simulace v programu Maple 11.....	72
6.2	Simulace v programu ANSYS 10.0.....	73
7	Závěr	75
7.1	Zhodnocení dosažených výsledků	75
7.2	Možnosti další práce.....	75
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	76
	PŘÍLOHY	78
	A Výkresová dokumentace	78
	B Určení doby prohřátí	80
	C Použité programy v MAPLE	80

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Závislost síly při konstantním prodloužení na teplotě [16]	12
Obr. 2: 1000 vazbový model řetězce polyetyleny [16]	13
Obr. 3: Vibroizolační segment	14
Obr. 4: Polymerový řetězec mezi dvěma uzly	17
Obr. 5: jedno-polymerový řetězec O P	18
Obr. 6: Nedeformovaná a deformovaná konfigurace řetězce	20
Obr. 7: Lineární reologický model	36
Obr. 8: Fotografie laboratorního lisu	40
Obr. 9: Zobrazení elementů a okrajových podmínek modelu	73
Obr. 10: Zobrazení vektorového pole celkového posunutí, vzorek 5, 100°C	74
Obr. 11: Výkres vibroizolačního segmentu	78
Obr. 12: Sestavení tramvajového kola	79
Obr. 13: model prohřátí po 1408 s v prostředí ANSYS	80

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Provozní podmínky segmentů	14
Tab. 2: Zaručované fyzikálně mechanické vlastnosti	15
Tab. 3: Konjugované dvojice výkonu	23
Tab. 4: Stlačení při teplotě 20°C	46
Tab. 5: Stlačení při teplotě 40°C	49
Tab. 6: Stlačení při teplotě 80°C	53
Tab. 7: Stlačení při teplotě 100°C	56
Tab. 8: Velikosti vzorků při různých teplotách	60
Tab. 9: Rozložení částečných proložení	61
Tab. 10: Hodnoty α podle teploty	63
Tab. 11: Tepelná roztažnost pryže	63
Tab. 12: Měrná telená kapacita pryže	63
Tab. 13: Hodnoty součinitele teplotní vodivosti pryže	64

Tab. 14: Simulované doby ohřevu	65
Tab. 15: Parametry neo-Hookeova modelu vzorek 1-3.....	67
Tab. 16: Parametry neo-Hookeova modelu vzorek 4-6.....	67
Tab. 17: Parametry reologického modelu.....	69

SEZNAM GRAFŮ

Graf 1: Závislost stlačení – čas, předzatížení vzorků.....	40
Graf 2: Závislost síla – stlačení, cyklické zatížení vzorku 2, 1.3.2006.....	42
Graf 3: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 2, 14.3.2007.....	42
Graf 4: Závislost síla - stlačení, porovnání vzorku po roce.....	43
Graf 5: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 1	43
Graf 6: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 3	44
Graf 7: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 4	44
Graf 8: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 5	45
Graf 9: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 6	45
Graf 10: Závislost síla - čas, vzorek 1, 20°C	46
Graf 11: Závislost síla - čas, vzorek 2, 20°C	47
Graf 12: Závislost síla - čas, vzorek 3, 20°C	47
Graf 13: Závislost síla - čas, vzorek 4, 20°C	48
Graf 14: Závislost síla - čas, vzorek 5, 20°C	48
Graf 15: Závislost síla - čas, vzorek 6, 20°C	49
Graf 16: Závislost síla - čas, vzorek 1, 40°C	50
Graf 17: Závislost síla - čas, vzorek 2, 40°C	50
Graf 18: Závislost síla - čas, vzorek 3, 40°C	51
Graf 19: Závislost síla - čas, vzorek 4, 40°C	51
Graf 20: Závislost síla - čas, vzorek 5, 40°C	52
Graf 21: Závislost síla - čas, vzorek 6, 40°C	52
Graf 22: Závislost síla - čas, vzorek 1, 80°C	53
Graf 23: Závislost síla - čas, vzorek 2, 80°C	54
Graf 24: Závislost síla - čas, vzorek 3, 80°C	54
Graf 25: Závislost síla - čas, vzorek 4, 80°C	55
Graf 26: Závislost síla - čas, vzorek 5, 80°C	55

Graf 27: Závislost síla - čas, vzorek 6, 80°C	56
Graf 28: Závislost síla - čas, vzorek 1, 100°C.....	57
Graf 29: Závislost síla - čas, vzorek 2, 100°C.....	57
Graf 30: Závislost síla - čas, vzorek 3, 100°C.....	58
Graf 31: Závislost síla - čas, vzorek 4, 100°C.....	58
Graf 32: Závislost síla - čas, vzorek 5, 100°C.....	59
Graf 33: Závislost síla - čas, vzorek 6, 100°C.....	59
Graf 34: Proložení hodnot exponenciálou	62
Graf 35: Rozložení proložených hodnot v čase	62
Graf 36: Proložení naměřených hodnot křivkami N-H modelu vzorky 1-3.....	68
Graf 37: Proložení naměřených hodnot křivkami N-H modelu vzorky 4-6.....	68
Graf 38: Proložení průběhu relaxace za teploty 100 °C, vzorek 2.....	70
Graf 39: Proložení průběhu relaxace za teploty 100 °C, vzorek 6.....	70
Graf 40: Proložení průběhu relaxace za teploty 20 °C, vzorek 6.....	71
Graf 41: Simulace vzorku 4 za teploty 40°C	72
Graf 42: Simulace vzorku 5 za teploty 100°C	72
Graf 43: Porovnání experimentu a simulace v prostředí ANSYS v10 (síla je tlaková)..	74

PŘEHLED OZNAČENÍ VELIČIN

označení	význam	jednotka
\mathbf{r}	polohový vektor konce řetězce	[m]
$ \mathbf{r} $	vzdálenost konců řetězce	[m]
$\bar{\mathbf{r}}^2$	průměrný čtverec vzdálenosti konců řetězce	[m ²]
\mathbf{e}_i	bázové vektory souřadného systému	[-]
η	měrná entropie	[JK ⁻¹ m ⁻³]
λ	osové protažení	[-]
N	hustota řetězců	[m ⁻³]
n	počet jednotek mezi uzly	[-]
l	délka jedné vazby	[m]
X_i	souřadnice před deformací	[m]
x_i	souřadnice po deformaci	[m]
\mathcal{K}	kinetická energie	[J]
P_{ext}	výkon vnějších sil	[W]
P_{int}	výkon vnitřních sil	[W]
\mathbf{d}	tenzor rychlosti deformace	[s ⁻¹]
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho tenzor napětí	[Pa]
e_c	hustota vnitřní energie v prostorovém popisu	[Jm ⁻³]
e	hustota vnitřní energie v materiálovém popisu	[Jm ⁻³]
\mathcal{E}	vnitřní energie tělesa	[J]
\mathbf{P}	první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí	[Pa]
\mathbf{S}	druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí	[Pa]
\mathbf{F}	deformační gradient	[-]
\mathbf{E}	Green -Lagrangeův tenzor deformace	[-]
\mathcal{Q}	tepelný výkon	[W]
q_n	hustota tepelného toku povrchem v prost. s.	[Jm ⁻² s ⁻¹]
\mathcal{Q}_n	hustota tepelného toku povrchem v mater. s.	[Jm ⁻² s ⁻¹]
r	objemové zdroje tepla v prostorových souřadnicích	[Jm ⁻³ s ⁻¹]
R	objemové zdroje tepla v materiálových souřadnicích	[Jm ⁻³ s ⁻¹]

označení	význam	jednotka
q	Cauchyho tepelný tok v prost. s.	$[\text{Jm}^{-2} \text{s}^{-1}]$
Q	Piola Kirchhoffův tepelný tok v mat. s	$[\text{Jm}^{-2} \text{s}^{-1}]$
n, N	Vnější normály povrchu	$[-]$
h	Cauchyho skutečný tok entropie v prost. s.	$[\text{Jm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}]$
H	Piola Kirchhoffův tok entropie v mat. s	$[\text{Jm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}]$
\tilde{r}	objemový zdroj entropie v prostorových souřadnicích	$[\text{Jm}^{-3}]$
\tilde{R}	objemový zdroj entropie v mat. souřadnicích	$[\text{Jm}^{-3}]$
Θ	absolutní teplota	$[\text{K}]$
\mathcal{D}_{int}	vnitřní disipace energie	$[\text{Jm}^{-3} \text{s}^{-1}]$
Ψ	Helmholtzova volná energie	$[\text{Jm}^{-3}]$
\mathbf{U}	pravý tenzor protažení	$[-]$
\mathbf{C}	pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace	$[-]$
p	Lagrangeův multiplikátor	$[-]$
J	Jakobián deformace	$[-]$
\mathcal{H}_e	strukturální termoelastický ohřev	$[\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
c	měrná tepelná kapacita	$[\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}]$
μ_0, μ_Θ	kontanty neo-Hookeovského modelu	$[\text{Pa}, \text{Pa}]$
E	Youngův modul pružnosti	$[\text{Pa}]$
γ	vnitřní poměrná deformace	$[-]$
q_a	napětí v příslušné větvi reologického modelu	$[\text{Pa}]$
τ	časová konstanta	$[\text{s}]$
β	součinitel napětí	$[-]$
\mathbf{Q}	overstress	$[\text{Pa}]$
n	počet větví reologického modelu	$[-]$
S_{iso}^∞	napětí od isochorické deformace	$[\text{Pa}]$
α	součinitel teplotní roztažnosti	$[\text{K}^{-1}]$
λ	součinitel tepelné vodivosti	$[\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}]$

1 Úvod

Práce je zaměřena na vypracování a aplikování modelu termoelastického a termoviskoelastického chování pryže **BAE 8534** za zvýšených teplot.

Ve druhé kapitole jsou shrnuty základní termodynamické principy nutné k odvození použitých konstitutivních vztahů. Nejprve se zabýváme statistickou teorií termodynamiky, a následně přecházíme k fenomenologickému přístupu.

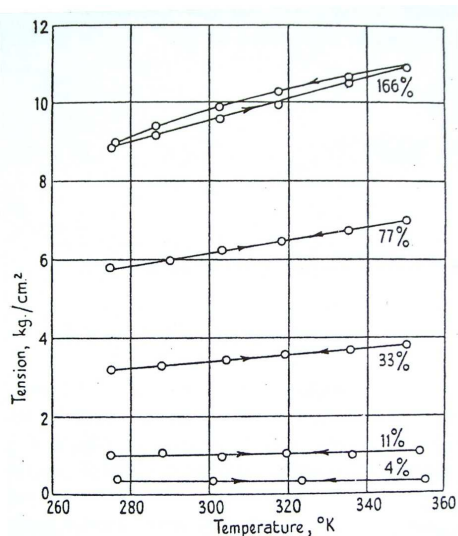
Ve třetí kapitole je přesně specifikován použitý materiálový model a je popsáno jeho odvození.

Ve čtvrté kapitole je shrnut postup experimentů a jsou zobrazeny naměřené závislosti zkoumaných veličin.

V páté kapitole je popsán postup, jak lze naměřená data zpracovat a získat tím hledané koeficienty materiálového modelu.

Na závěr v šesté kapitole jsou porovnány výsledky simulace v prostředí MAPLE 11 a ANSYS 10.0 s výsledky měření.

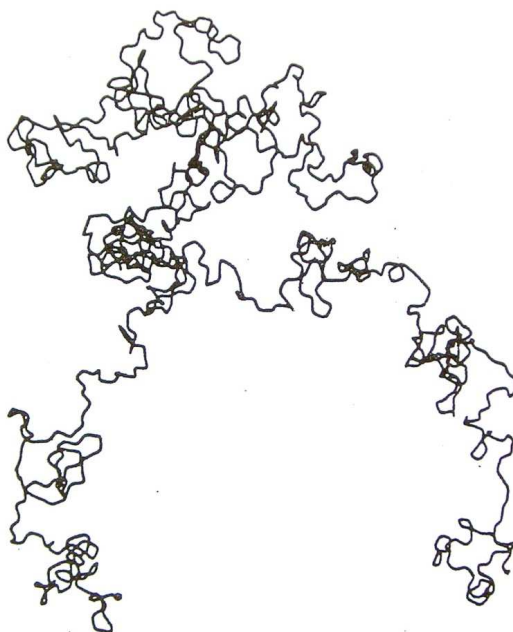
Základní poznatky o pryži uvádějí, že je schopna velkých vratných deformací, má nelineární závislost mezi napětím a deformací a její materiálové parametry jsou závislé na teplotě (Obr. 1). Vazba mezi deformací a teplotou dále komplikuje nelineární vztahy, které charakterizují chování pryže při velkých deformacích.



Obr. 1: Závislost síly při konstantním prodloužení na teplotě [16]

Slovo pryž lze chápat dvěma různými významy. Původně slovo pryž znamenalo *indickou pryž*, přírodního produktu stromu *Hevea Braziliensis*, kde hlavní složkou je uhlovodík $(C_5H_8)_n$ (polyisopren). Později bylo vyvinuto mnoho syntetických látek s různým chemickým složením napodobující fyzikální vlastnosti přírodní pryže, zejména fyzikální vlastnost velkých elastických deformací při malých napětích. Typická schopnost deformace přírodní pryže je 500% až 1000%.

V produktu stromu *Hevea Braziliensis* se nalézá polyisopren ve formě malých *globulí* o průměru přibližně $0,5\mu m$, který je rozptýlen ve vodním roztoku o hmotnostní koncentraci přibližně 35%. Po vyloučení z roztoku je polyisopren zformován do dlouhého řetězce, jehož každá čtvrtá vazba je dvojná. Toto zdvojování vazeb vede k vysoké reaktivitě, která se využívá při vulkanizaci (reakci se sírou). Ale tato reaktivita způsobuje rychlou degradaci na vzduchu, což vede ke křehnutí pryže. Délka řetězce bývá 350000 základních jednotek, délka jedné molekuly přírodní pryže je průměrně $2\mu m$.

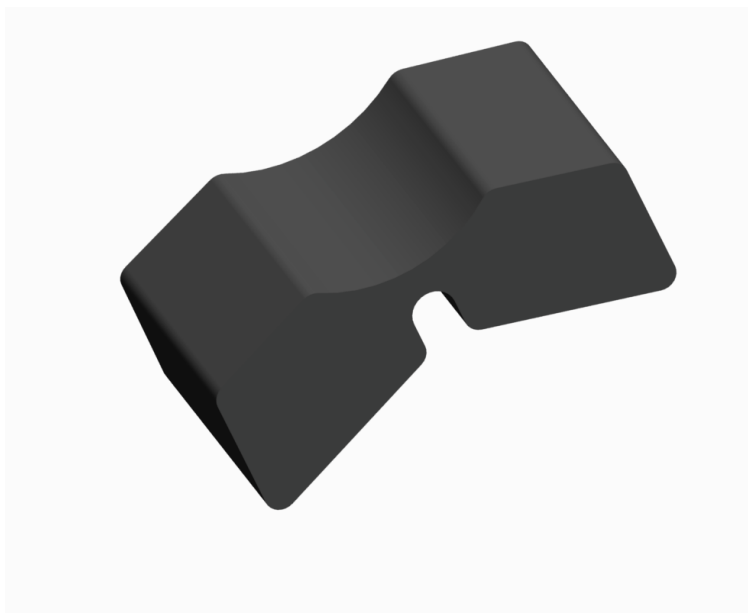


Obr. 2: 1000 vazbový model řetězce polyetyleny [16]

Syntetické pryže jsou například polychloropren, který nenasáká olejem a je odolný vůči degradaci světlem a vzduchem, což se s výhodou používá při těsnění. Polyisobutylen má menší propustnost plynů, což se uplatňuje v pneumatikách. O obecných vlastnostech pryže se lze více dočíst v [6,16]

1.1 Zkoušený materiál BAE 8534

Výrobní označení zkoumaného materiálu je BAE 8534, výrobcem je RUBENA a.s. Hradec Králové. RUBENA z této pryže vyrábí vibroizolační segmenty (Obr. 3, Obr. 11 v příloze A), určené k odpružení kol tramvají. Tyto segmenty jsou montovány firmou BONATRANS a.s. Bohumín mezi obruč a kotouč kola (Obr. 12, v příloze A). Při provozu jsou namáhány tlakem (radiální zatížení kola) a smykem (přenos krouticího momentu).



Obr. 3: Vibroizolační segment

Materiál BAE 8534 je, dle údajů výrobce, pryž na bázi IR (syntetický izoprenový elastomer) a BR (butadienový elastomer). Tento materiál je zatříděn dle ČSN 62 0002.

Tab. 1 uvádí provozní podmínky segmentů.

minimální teplota	-40 °C
maximální teplota	+40 °C, krátkodobě + 70°C
relativní vlhkost vzduchu	90%

Tab. 1: Provozní podmínky segmentů

V tab.2 jsou uvedeny výrobcem zaručované fyzikálně mechanické vlastnosti materiálu BAE 8534

Zaručovaná vlastnost	Jednotky	Zaručované	Zkouška se
Odolnost proti zvýšeným teplotám	°C	100	ČSN 62 1522
Odolnost proti oleji	%	nad 140	ČSN ISO 1817
Odolnost proti nízkým teplotám	°C	-55	ČSN 62 1554
Tvrdost ¹	IRDH	76-85	ČSN ISO 48
Tvrdost	ShA	77-83	ČSN EN ISO
Pevnost v tahu	MPa	nejméně 14	ČSN ISO 37
Tažnost	%	nejméně 150	ČSN ISO 37
Trvalá deformace v tlaku	%	nejméně 40	ČSN ISO 815

Tab. 2: Zaručované fyzikálně mechanické vlastnosti

¹ Hodnota tvrdosti v jednotkách IRHD je pouze orientační, prioritní je hodnota v jednotkách ShA.

2 Termodynamické principy

Pryž nad teplotou skelného přechodu je amorfním elastomerem sestávajícím se z třírozměrné molekulové sítě, jejíž řetězce jsou chemicky a fyzikálně vzájemně propojeny. Segmenty řetězců mezi vazbami se však mohou volně pohybovat - svinovat se a rozvinovat. V nezatíženém stavu jsou řetězce zavínuté a mají vyšší entropii. Je-li pryžový vzorek zatížen tahem, polymerní molekuly začnou měnit svou *konformaci* a jejich řetězce se začnou rozvinovat z pravděpodobnějšího stavu s vyšší entropií do méně pravděpodobného stavu s nižší entropií. Snížení entropie způsobuje odpor proti deformaci, tedy pryž je považována za *entropickou pružinu*. Tělesa z většiny materiálů se roztahují, jsou-li zahřívána. I když pryž se v normálních podmínkách chová stejně, zavěsíme-li na pryžový pásek závaží a poté ho zahřejeme, dojde k jeho zkrácení, při adiabatickém natažení pryžového pásu dojde k jeho ohřátí, což se nazývá Goughův jev [16,9]. Vysvětlením těchto jevů je zásadní podíl entropie v elasticitě pryže.

Termomechanické chování pryže je v literatuře popisováno ze dvou hledisek:

- obecný přístup *statistické termodynamiky* s Gaussovskou i ne-Gaussovskou teorií molekulových sítí.
- *fenomenologický* přístup mechaniky kontinua, který používá *Helmholtzovu funkci volné energie*, která závisí na deformaci a teplotě, na základě energetické bilance a druhého zákona termodynamiky jsou pak odvozeny konstitutivní vztahy pro napětí a entropii

Jev pryžové elasticity je spojován s Brownovým pohybem atomů dlouhého řetězce molekul. Tento druh pohybu je podobný pohybu molekul tekutin, s jedním rozdílem, že molekuly nejsou volné, ale pospojované do dlouhého řetězce. Ze schopnosti přírodní pryže rozpouštět se ve vhodných rozpouštědlech a skutečnosti, že pryže při deformaci téměř nemění svůj objem, můžeme dedukovat, že síly mezi molekulami jsou stejného řádu jako mezimolekulární síly v nízkomolekulárních tekutinách. Rozdíl mezi pryžemi a tekutinami je tedy pouze v tom, že pryže obsahují příčné vazby a dochází ke křížení mezi řetězci, což tvoří prostorovou síť vzájemně propojených řetězců.

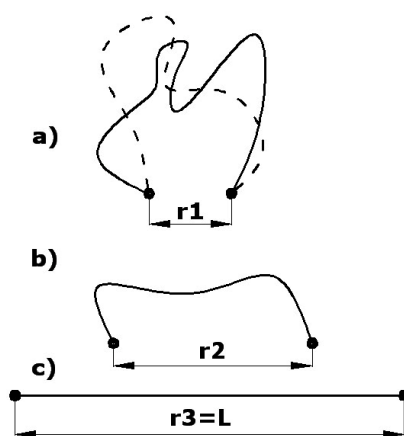
Tyto závěry popisují tři nutné podmínky pryžové elasticity:

- Přítomnost dlouhých molekul, které umožňují volné otáčení vazeb.
- Slabé druhotné síly mezi molekulami.
- Křížové spojení molekul na několika místech podél řetězce.

2.1 Základy statistické teorie termodynamiky

2.1.1 Fyzické předpoklady deformace

Na základě mnoha experimentů víme, že amorfní polymery jsou složeny z klubek makromolekul, které si představujeme jako řetězce, mající vysoký stupeň volnosti.



Obr. 4: Polymerový řetězec mezi dvěma uzly

Na Obr. 4. lze pozorovat model řetězce polymeru mezi dvěma uzly, v kterých je spojen s dalšími řetězci. Vzdálenost r mezi dvěma uzly charakterizuje konformaci molekuly. Obr. 4 a) ukazuje polymerní řetězec s uzly vzdálenými o r_1 . Tato vzdálenost je mnohem menší než délka L plně rozvinutého řetězce, díky tomu může molekula zaujmout mnoho konformací. Jak je zřejmé, při zvětšení r může molekula zaujmout méně konformací, při vzdálenosti $r=L$ existuje pouze jedna jediná konformace - řetězec je přímý (Obr. 4 c)). Statistická teorie pryžové elasticity předpokládá, že počet možných konformací je funkcí entropie molekuly, jak se molekula natahuje, množství konformací a entropie klesá.

Pravděpodobnost, že vzdálenost uzlů bude v intervalu vzdálenosti $x \in (x_1; x_1 + dx_1)$ můžeme vyjádřit jako

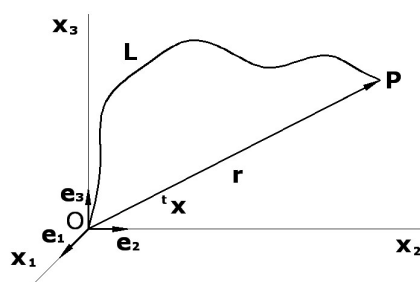
$$p(x_1)dx_1 = \frac{b}{\pi^2} e^{\left(\frac{-b^2}{x_1^2}\right)} dx_1, \quad (2.1)$$

kde $p(x_1)$ je hustota pravděpodobnosti a $b = \frac{3}{2\bar{r}^2}$ je parametr modelu. Pro více podrobností viz. [3].

2.1.2 Elasticita síť molekul

Typickou vulkanizovanou pryž si můžeme představit jako shromáždění makromolekul. Každý řetězec je propojen na koncích (v uzlech) s ostatními řetězci a vzniká tím jedna velká molekula, kterou nazýváme molekulovou sítí.

Předpokládáme, že molekulová síť má hustotu N řetězců na jednotku objemu. Uvažujme jeden řetězec vyňatý ze sítě, jehož délka je L . Konce řetězce reprezentují body O a P (Obr. 5).



Obr. 5: jedno-polymerový řetězec O P

Jeden konec řetězce je zafixován v bodě O , druhý je dán vektorem $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$, kde \mathbf{e}_i jsou báze vektory souřadného systému, směřujícím do bodu P . Předpokládáme, že velikost r je mnohem menší než L , tudíž platí Gaussova statistická teorie. Délka $L = n \cdot l$, kde n je počet jednotek spojených do řetězce, l je délka jedné vazby mezi atomy. Dále předpokládáme kompletně náhodné rozložení směrů vazeb. Průměrný čtverec délky \bar{r}^2 řetězce, za těchto předpokladů je

$$\bar{r}^2 = nl^2. \quad (2.2)$$

Při zobecnění vztahu (2.1) do 3 rozměrného systému dostaneme pravděpodobnost, že bod P se nalézá v objemu dV .

$$p(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{(-b^2 r^2)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (2.3)$$

kde $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Po dosazení okrajových podmínek pro sféru získáme vztah pro hustotu pravděpodobnosti výskytu koncového bodu P mezi sféry s poloměry r a $r+dr$

$$p(r) dv = p(r) 4\pi r^2 dr = \frac{b^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} 4\pi r^2 e^{(-b^2 r^2)} dr. \quad (2.4)$$

2.1.3 Entropie jednoho řetězce

Z důvodu statistického náhledu na problém uvažujeme, že entropie řetězce je úměrná logaritmu hustoty pravděpodobnosti $p(r)$. Po aplikaci Boltzmannova principu dostaneme entropii řetězce η_i

$$\eta_i = a + k \cdot \ln(p(r)), \quad (2.5)$$

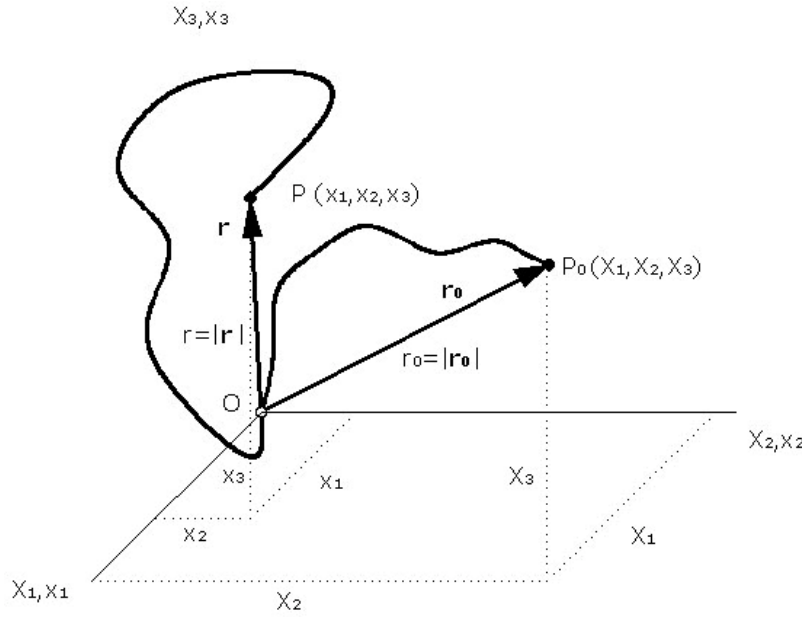
kde a označuje konstantní úroveň entropie, k značí Boltzmannovu konstantu $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Nm} / \text{K}$. Dosazením (2.3) do (2.5) dostaneme

$$\eta_i = c - k \cdot b^2 r^2, \quad (2.6)$$

kde $c = a + k \ln(b^3 / \pi^{3/2})$. Pro řetězec vyňatý ze sítě platí,

$$b = \frac{3}{2\overline{r_{out}^2}}, \quad (2.7)$$

kde $\overline{r_{out}^2}$ značí modus čtverce vzdálenosti konců řetězce vyňatého ze sítě.



Obr. 6: Nedeformovaná a deformovaná konfigurace řetězce

Na Obr. 6 vidíme nedeformovanou konfiguraci řetězce s koncovými body O a P_0 , které jsou charakterizovány vektorem \mathbf{r}_0 s materiálovými souřadnicemi X_a , $a=1,2,3$, a délkou $r_0 = |\mathbf{r}_0|$. Předpokládáme homogenní deformaci, při které jak ukazuje Obr. 6 vektor \mathbf{r}_0 přejde ve vektor \mathbf{r} se souřadnicemi x_a , $a=1,2,3$, a délkou $r = |\mathbf{r}|$. Bod P_0 je přemístěn do P. Z důvodu homogenní deformace můžeme psát

$$x_a = \lambda_a X_a, \quad a=1,2,3, \quad (2.8)$$

kde λ_a značí protažení v daném směru (anglicky stretch). Změnu entropie řetězce $\Delta\eta_i$ po dosazení do (2.6) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} \Delta\eta_i &= \left[c - k \cdot b^2 \left(\lambda_1^2 X_1^2 + \lambda_2^2 X_2^2 + \lambda_3^2 X_3^2 \right) \right] - \left[c - k \cdot b^2 \left(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \right) \right] = \\ &= -k \cdot b^2 \left[\left(\lambda_1^2 - 1 \right) X_1^2 + \left(\lambda_2^2 - 1 \right) X_2^2 + \left(\lambda_3^2 - 1 \right) X_3^2 \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

Změna entropie N řetězců, které obsahuje jednotkový objem sítě, můžeme napsat

$$\Delta\eta = \sum_{i=1}^N \Delta\eta_i = -k \cdot b^2 \left[\left(\lambda_1^2 - 1 \right) \sum_{i=1}^N X_1^2 + \left(\lambda_2^2 - 1 \right) \sum_{i=1}^N X_2^2 + \left(\lambda_3^2 - 1 \right) \sum_{i=1}^N X_3^2 \right], \quad (2.10)$$

požadujeme

$$\sum_{i=1}^N r_{0in}^2 = N \overline{r_{0in}^2}, \quad (2.11)$$

kde $\overline{r_{0in}^2}$ je průměrný čtverec délky vektoru r_{0in}^2 , index in značí, že se jedná o řetězec uvnitř objemu tělesa. Vektor \mathbf{r}_0 nemá preferovaný směr, proto můžeme psát $\sum_{i=1}^N X_1^2 = \sum_{i=1}^N X_2^2 = \sum_{i=1}^N X_3^2$, a současně platí, $\sum_{i=1}^N X_1^2 + \sum_{i=1}^N X_2^2 + \sum_{i=1}^N X_3^2 = \sum_{i=1}^N r_{0in}^2$, z toho vyplývá

$$\sum_{i=1}^N X_1^2 = \sum_{i=1}^N X_2^2 = \sum_{i=1}^N X_3^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N r_{0in}^2 = \frac{1}{3} N \overline{r_{0in}^2}, \quad (2.12)$$

Použitím (2.12)(2.7)(2.9) nalezneme změnu entropie sítě nezávislou na b

$$\Delta\eta = -\frac{1}{2} Nk \frac{\overline{r_{0in}^2}}{r_{0out}^2} \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (2.13)$$

Po dosazení Legendreovy transformace(2.29), nalezneme Helmholtzovu volnou energii v tvaru

$$\Psi = \frac{1}{2} Nk\Theta \frac{\overline{r_{0in}^2}}{r_{0out}^2} \cdot (\lambda_1^2 + \lambda_1^2 + \lambda_3^2 - 3). \quad (2.14)$$

Z Helmholtzovy volné energie se vychází při stanovení konstitutivních vztahů a vztah (2.14) je shodný s neo-Hookeovským modelem materiálu. O statistické teorii termodynamiky se lze více dočíst [6,9,16]

2.2 Fenomenologický přístup mechaniky kontinua

V této části uvádíme přehled základů termodynamiky deformovatelných pevných těles a základní přístupy modelování hyperelastických a viskoelastických materiálů při velkých deformacích. Vycházíme při tom z moderní knihy G. Holzapfela [9] a dodržujeme při tom jeho značení.

2.2.1 Zákony zachování

Pokud uvažujeme pouze mechanickou energii, bilance mechanické energie je

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{K}(t) + P_{int}(t) = P_{ext}(t) \quad , \quad (2.15)$$

kde $\frac{D}{Dt}$ je materiálová derivace, $\frac{D}{Dt} \mathcal{K}(t)$ je přírůstek kinetické energie, $P_{ext}(t)$ je výkon vnějších sil a $P_{int}(t)$ je vnitřní mechanický výkon neboli výkon napětí. V prostorovém popisu bude

$$P_{int}(t) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dv = \int_{\Omega} tr(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{d}) \, dv \quad , \quad (2.16)$$

kde \mathbf{d} je tenzor rychlosti deformace a $\boldsymbol{\sigma}$ je Cauchyho tenzor napětí.

Zavádíme hustotu vnitřní energie. Je to termodynamická stavová veličina označená $e_c(\mathbf{x}, t)$ a $e(\mathbf{X}, t)$ v prostorovém a materiálovém popisu. Je definována na jednotku objemu. Vnitřní energii $\mathcal{E}(t)$ obsaženou v tělese pak můžeme vyjádřit jako

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\Omega} e_c(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\Omega_0} e(\mathbf{X}, t) \, dV \quad . \quad (2.17)$$

Vnitřní mechanický výkon můžeme vyjádřit v materiálovém popisu

$$P_{int}(t) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \, dV \quad , \quad (2.18)$$

kde \mathbf{P} je první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí a $\dot{\mathbf{F}}$ je rychlost deformačního gradientu, \mathbf{S} je druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí a $\dot{\mathbf{E}}$ značí rychlost deformace (Greena-Lagrange). Všechny tyto možnosti můžeme shrnout do Tab. 3 konjugovaných dvojic výkonu. Více o konjugovaných dvojicích [12]

Míra přetvoření	Míra napětí
$\dot{\mathbf{E}}_{ij}$ - rychlost Greena-Lagrange	\mathbf{S}_{ij} - druhý Piola-Kirchhoff
$\dot{\mathbf{F}}_{ij}$ - rychlost deformačního gradientu	\mathbf{P}_{ij} - první Piola-Kirchhoff
\mathbf{d}_{ij} - rychlostní gradient	$\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ - Cauchyho skutečné napětí

Tab. 3: Konjugované dvojice výkonu

Tepelný výkon je definován součtem

$$\mathcal{Q}(t) = \int_{\partial\Omega} q_n ds + \int_{\Omega} r dv = \int_{\partial\Omega_0} Q_n dS + \int_{\Omega_0} R dV, \quad (2.19)$$

kde q_n, Q_n jsou hustoty tepelného toku povrchem tělesa v prostorovém a materiálovém popisu, r a R jsou objemové zdroje tepla v prostorovém a materiálovém popisu. Použijeme-li Stokesovu větu lze pro $q_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ a $Q_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ vyjádřit

$$\begin{aligned} q_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) &= -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \\ Q_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) &= -\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

kde, $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ je Cauchyho tepelný tok, $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)$ je Piola-Kirchhoffův tepelný tok, \mathbf{n} a \mathbf{N} jsou vnější normály povrchu. První zákon termodynamiky říká, že přírůstek vnitřní energie je roven součtu výkonu napětí a tepelného výkonu

$$P_{int}(t) + \mathcal{Q}(t) = \frac{D}{Dt} \mathcal{E}(t), \quad (2.21)$$

po dosažení za vnitřní mechanický výkon a převedení do lokálního tvaru získáme bilanci energie \dot{e} v materiálovém popisu

$$\dot{e} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{Div} \mathbf{Q} + R. \quad (2.22)$$

kde $\text{Div} \mathbf{Q}$ je teplo sdílené povrchem. Druhý zákon termodynamiky říká, že celkový přírůstek entropie $\Gamma(t)$ je vždy nezáporný,

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} S(t) - \tilde{Q}(t) \geq 0 \quad , \quad (2.23)$$

kde $\frac{D}{Dt} S(t)$ je materiálová časová derivace entropie, $\tilde{Q}(t)$ je rychlost přítoku entropie, použijeme-li vazbu zdrojů a toků entropie na zdroje a toky tepla

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \quad \tilde{r} = \frac{r}{\Theta} \quad a \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \quad \tilde{R} = \frac{R}{\Theta} \quad , \quad (2.24)$$

kde Θ je absolutní teplota, \tilde{r} , \tilde{R} jsou objemové zdroje entropie.

Rychlost změny entropie $\tilde{Q}(t)$ je

$$\tilde{Q}(t) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{\Omega} \tilde{r} \, dv = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} \, ds + \int_{\Omega} \tilde{R} \, dV \quad , \quad (2.25)$$

kde \mathbf{h} , \mathbf{H} jsou skutečný tok entropie v prostorovém popisu resp. Piola-Kirchoffův tok entropie v materiálovém popisu. Po úpravě dostaneme Clausius-Duhemovu nerovnost v materiálovém popisu,

$$\dot{\eta} - \frac{R}{\Theta} + \frac{1}{\Theta} \operatorname{Div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{Grad} \Theta \geq 0 \quad , \quad (2.26)$$

kde $\dot{\eta}$ je přírůstek entropie. Dosazením z prvního zákona termodynamiky za zdroje tepla a předpokládáme-li disipaci v důsledku vedení tepla za vždy nezápornou, tj.

$$-\frac{1}{\Theta^2} \mathbf{Q} \cdot \operatorname{Grad} \Theta \geq 0 \quad , \quad (2.27)$$

dostaneme Clausius-Planckovu nerovnost

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{P} : \mathbf{F} - \dot{e} + \Theta \dot{\eta} \geq 0 \quad , \quad (2.28)$$

kde \mathcal{D}_{int} značí disipaci energie, nebo-li lokální produkci entropie.

Termodynamické děje dělíme do několika základních typů

- Adiabatický
- Izotermický
- Izoentropický

Adiabatický děj se vyznačuje tím, že sdílení tepla při tomto ději je nulové ($q_n=0$). Jestliže změna entropie s je při ději nulová, proces nazýváme izoentropický. Pokud je teplota Θ konstantní, děj se nazývá izotermický. Pro izoentropický děj vratný je velikost změny entropie $\tilde{Q}(t)$ rovna 0.

Zavedeme další termodynamický potenciál - Helmholtzovu volnou energii $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, \Theta)$, kterou vyjádříme pomocí Legendreovy transformace

$$\Psi = e - \Theta \eta \quad , \quad (2.29)$$

po dosazení do (2.28) za \dot{e} dostaneme pro disipaci \mathcal{D}_{int} vztah

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\Psi} - \eta \dot{\Theta} \geq 0 \quad , \quad (2.30)$$

Přírůstek volné energie $\Psi = \Psi(\mathbf{F}, \Theta)$ lze zapsat jako

$$\dot{\Psi} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Theta} : \dot{\mathbf{F}} + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{F}} \cdot \dot{\Theta} \quad , \quad (2.31)$$

tento výraz nazýváme Gibbsův vztah.

2.2.2 Hyperelastický materiál

U tohoto typu materiálu je Helmholtzova volná energie funkcí pouze deformačního gradientu a vnitřní disipace je nulová.

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{\Psi} = \left(\mathbf{P} - \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right) : \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad , \quad (2.32)$$

z této rovnice plyne vztah pro 1. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{P} \quad , \quad (2.33)$$

Ψ nezáleží na rotaci, a tudíž lze dále psát

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{U}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{E}) \quad , \quad (2.34)$$

kde \mathbf{U} je pravý tenzor protažení, \mathbf{C} je pravý Cauchy-Greenův tenzor deformace.

V závislosti na hlavních protaženích máme

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.35)$$

a vztahy pro napětí v hlavních směrech budou

$$\sigma_a = J^{-1} \lambda_a \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.36)$$

$$P_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.37)$$

$$S_a = \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.38)$$

kde $J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ je změnou objemu a nazýváme jej Jakobiánem deformace, σ_a je Cauchyho skutečné napětí.

2.2.3 Nestlačitelný hyperelastický materiál

Helmholtzova volná energie je funkcí deformačního gradientu, a Lagrangeova multiplikátoru p , který můžeme považovat za hydrostatický tlak a lze ho spočítat z okrajové podmínky na okrajích tělesa. Reprezentuje reakce na vnitřní kinematické vazby-nestlačitelnost, tyto reakce nekonají práci. Teplotní vliv neuvažujeme. Objemová změna $J=1$.

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - p(J - 1) \quad , \quad (2.39)$$

a vztahy pro napětí v hlavních směrech budou

$$\sigma_a = -p + \lambda_a \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.40)$$

$$P_a = -\frac{1}{\lambda_a} p + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a=1,2,3 \quad , \quad (2.41)$$

$$S_a = -\frac{1}{\lambda_a^2} p + \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_a} \quad , \quad a=1,2,3 \quad . \quad (2.42)$$

2.2.4 Thermoelastický materiál

Helmholtzova volná energie je pro tento typ materiálu funkcí deformačního gradientu a teploty. Její přírůstek reprezentuje rovnice (2.31). Dosadíme-li tuto rovnici do (2.28) dostaneme

$$\mathcal{D}_{int} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Theta} : \dot{\mathbf{F}} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{F}} \cdot \dot{\Theta} - \eta \dot{\Theta} \geq 0 \quad , \quad (2.43)$$

pro thermoelastický materiál je vnitřní disipace nulová $\mathcal{D}_{int} = 0$ a proto

$$\mathbf{P} = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Theta} \quad a \quad \eta = - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{F}} \quad , \quad (2.44)$$

tedy volná energie je potenciálem napětí při izotermickém ději. Lze vyjádřit druhé Piola-Kirchhofovo napětí, a entropii pomocí

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = 2 \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \Theta)}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Theta} \quad a \quad \eta = - \left. \frac{\partial \Psi(\mathbf{C}, \Theta)}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{C}} \quad , \quad (2.45)$$

vnitřní energie lze vyjádřit pomocí (2.29), tedy $e = e(\mathbf{F}, \eta)$. Předpokládáme, že lze získat inverzní k (2.44), tedy funkci $\Theta = \Theta(\mathbf{F}, \eta)$ a vyjádřit Ψ jako funkci $\Psi(\mathbf{F}, \eta)$, a potom

$$e = \Psi + \Theta \eta = e(\mathbf{F}, \eta) \quad , \quad (2.46)$$

dosadíme-li do (2.28), získáme

$$\dot{e} = \left. \frac{\partial e}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\eta} : \dot{\mathbf{F}} + \left. \frac{\partial e}{\partial \eta} \right|_{\mathbf{F}} \cdot \dot{\eta} \quad , \quad (2.47)$$

z této rovnice plyne, že

$$\mathbf{P} = \left| \frac{\partial e}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\eta} \quad a \quad \Theta = - \left| \frac{\partial e}{\partial \eta} \right|_{\mathbf{F}} . \quad (2.48)$$

Vnitřní energie je potenciálem napětí při izoentropickém ději.

Nyní můžeme vyjádřit termodynamické Maxwellovi vztahy,

$$\left| \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{F}} = - \left| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\Theta} \quad a \quad \left| \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \eta} \right|_{\mathbf{F}} = \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\eta} , \quad (2.49)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} \right|_{\mathbf{P}} = - \left| \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{P}} \right|_{\eta} \quad a \quad \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Theta} \right|_{\mathbf{P}} = \left| \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{P}} \right|_{\Theta} . \quad (2.50)$$

2.2.5 Kalorimetrie

Nejdříve zavedeme **měrnou tepelnou kapacitu za konstantní deformace**, obvykle označovanou c_F . Je to energie potřebná pro zahřátí jednotky objemu o jeden stupeň, při zachování deformace. Měrná tepelná kapacita je vždy kladná.

$$c_F = c_F(F, \Theta) = -\Theta \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta \partial \Theta} \right|_{\mathbf{F}} > 0 . \quad (2.51)$$

Strukturální termoelastický ohřev reprezentuje termoelastický efekt, jinak též nazývaný Gough-Jooulovův jev, způsobuje během adiabatické deformace typické teplotní změny. Často se tento jev zanedbává, protože změna teploty je pouze malá.

$$\mathcal{H}_e = -\Theta \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \mathbf{F} \partial \Theta} : \dot{\mathbf{F}} , \quad (2.52)$$

lokální produkce entropie v termoelastickém procesu je nulová ($D_{\text{int}}=0$). Vycházíme z (2.22) do níž dosazujeme (2.28) a získáme tím

$$\Theta \dot{\eta}(\mathbf{F}, \Theta) = -\text{Div} \mathbf{Q} + D_{\text{int}} + R , \quad (2.53)$$

kterou přetransformujeme pomocí (2.44) na tvar

$$\begin{aligned}\Theta \dot{\eta}(\mathbf{F}, \Theta) &= -\text{Div} \mathbf{Q} + R = \Theta \frac{\partial \eta(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} + \Theta \frac{\partial \eta(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \Theta} \cdot \dot{\Theta} = \\ &= -\Theta \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \mathbf{F} \partial \Theta} : \dot{\mathbf{F}} - \Theta \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \Theta \partial \Theta} \cdot \dot{\Theta} = c_F \dot{\Theta} + \mathcal{H}_e, \end{aligned} \quad (2.54)$$

bez přívodu tepla $\text{Div} \mathbf{Q} = 0$ bude zdroj tepla R na jednotku objemu dán

$$R = \mathcal{H}_e + c_F \dot{\Theta}. \quad (2.55)$$

2.2.6 Navržení funkce volné energie $\psi(\mathbf{F}, \theta)$ pro termoelastický materiál.

Do rovnice (2.51) dosadíme (2.44) a získáme

$$c_F = c_F(F, \Theta) = -\Theta \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta \partial \Theta} \right|_F = \Theta \left| \frac{\partial \eta(\mathbf{F}, \Theta)}{\partial \Theta} \right|_F, \quad (2.56)$$

dosadíme-li (2.29) a použijeme následně (2.44) získáme výsledný vztah pro měrnou tepelnou kapacitu

$$c_F = \left| \frac{\partial e}{\partial \Theta} \right|_F - \eta - \left| \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right|_F = \left| \frac{\partial e}{\partial \Theta} \right|_F. \quad (2.57)$$

Na entropické materiály můžeme nahlížet, podle 2 teorií:

1. *čistě entropická teorie*- vnitřní energie je funkce pouze teploty $e = e(\Theta)$, změna vnitřní energie je s deformací nulová $e_0(\mathbf{F}) = 0$, index 0 značí veličinu při referenční teplotě.
2. *modifikovaná entropická teorie*- vnitřní energie je funkcí teploty a změny objemu $e = e(\Theta) + e_0(J)$, změna vnitřní energie závisí pouze na změně objemu J $e_0(\mathbf{F}) = e_0(J)$

Lze předpokládat dle (2.56), že specifické teplo je funkcí pouze teploty $c_F = c_F(\Theta)$.

Předpokládáme-li změnu teploty, pak

$$\left| \frac{\partial e}{\partial \Theta} \right|_F = c(\Theta) \quad (2.58)$$

Vnitřní energii dostaneme integrací tohoto vztahu

$$e(\mathbf{F}, \Theta) - e_0(\mathbf{F}) = \int_{\Theta_0}^{\Theta} c(\hat{\Theta}) d\hat{\Theta} \quad , \quad (2.59)$$

a integrováním vztahu (2.56) získáme entropii

$$\eta(\mathbf{F}, \Theta) - \eta_0(\mathbf{F}) = \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\hat{\Theta})}{\hat{\Theta}} d\hat{\Theta} \quad , \quad (2.60)$$

zde je $\eta_0(\mathbf{F}) = \eta(\mathbf{F}, \Theta_0)$ při referenční teplotě Θ_0 .

Dle (2.29) platí

$$\Psi(\mathbf{F}, \Theta) = e(\mathbf{F}, \Theta) - \Theta \eta(\mathbf{F}, \Theta_0) \quad , \quad (2.61)$$

použitím (2.59) a (2.60) dostaneme

$$\Psi(\mathbf{F}, \Theta) = e(\mathbf{F}) + \int_{\Theta_0}^{\Theta} c(\hat{\Theta}) d\hat{\Theta} - \Theta \eta_0(\mathbf{F}) - \Theta \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\hat{\Theta})}{\hat{\Theta}} d\hat{\Theta} \quad , \quad (2.62)$$

označme

$$T(\Theta) = - \int_{\Theta_0}^{\Theta} c(\hat{\Theta}) (\Theta - \hat{\Theta}) \frac{d\hat{\Theta}}{\hat{\Theta}} \quad , \quad (2.63)$$

kde $T(\Theta)$ můžeme považovat za čistě tepelnou část volné energie Ψ , získáme

$$\Psi(\mathbf{F}, \Theta) = e(\mathbf{F}) - \Theta \eta_0(\mathbf{F}) + T(\Theta) \quad , \quad (2.64)$$

Předpokládáme, že při referenční teplotě Θ_0 bude izotermální volnou energii rovnou

$$\Psi_0(\mathbf{F}) = e_0(\mathbf{F}) - \Theta_0 \eta_0(\mathbf{F}) \Rightarrow \eta_0 = \frac{e_0(\mathbf{F})}{\Theta_0} - \frac{\Psi_0(\mathbf{F})}{\Theta_0} \quad , \quad (2.65)$$

dosazením do vztahu (2.64) získáme

$$\Psi(\mathbf{F}, \Theta) = \Psi_0(\mathbf{F}) + e_0(\mathbf{F}) \left[1 - \frac{\Theta}{\Theta_0} \right] + T(\Theta) \quad , \quad (2.66)$$

kde, pro $c(\Theta) = c_0$ konstanta platí

$$T(\Theta) = c_0 \left[\vartheta - \Theta \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] . \quad (2.67)$$

Ze vztahu (2.66) budeme vycházet při stanovení konstitutivních vztahů pro náš materiál.

Více o termodynamických principech v mechanice kontinua lze dohledat [9,10,12]

3 Materiálový model

3.1 Teplotní roztažnost pryže

Zkoušená pryž, tak jako většina materiálů, při zahřátí zvětšuje svůj objem, tedy mění velikosti svých stran. Tento fyzikální jev závisí na teplotě a deformaci. Uvažujeme-li materiál za nestlačitelný, platí vztah pro změnu objemu

$$J = J_{\Theta}(\Theta) = \det F_{\Theta} = e^{\int_{\Theta_0}^{\Theta} 3\alpha(\hat{\Theta}) d\hat{\Theta}} > 0, \quad (3.1)$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti, Θ_0 je počáteční teplota, Θ je koncová teplota, uvažujeme-li α koeficient za lineární, který značíme α_0 získáme vztah

$$J = e^{[3\alpha_0(\Theta - \Theta_0)]}, \quad (3.2)$$

a linearizme toho vztahu vede na vztah objemové změny

$$J = 1 + 3\alpha_0(\Theta - \Theta_0), \quad (3.3)$$

kde α_0 je koeficient teplotní roztažnosti. Vyjádříme-li změnu délky

$$\Delta L = \alpha_0 \cdot L_0 \cdot \Delta T, \quad (3.4)$$

po dosazení $\Delta L = L - L_0$ a jednoduchém vyjádření α dostaneme

$$\alpha_0 = \frac{\frac{L}{L_0} - 1}{\Delta T}. \quad (3.5)$$

3.2 Navržený termoelastický model pryže

Jako hyperelastický materiálový model jsme vybrali nestlačitelný neo-Hookeovský, model, protože nebyl proveden test pro určení Poissonovy konstanty, která se u pryže pohybuje mezi 0,48 až 0,5, takže lze předpokládat nestlačitelný materiál.

Holzapfel [14] uvádí termoelastický model pryže pro obecnou napjatost založený na rozložení deformace na část objemovou a isochorickou. Tento model vychází ze vztahu (2.66). Modifikované hlavní protažení jsou definovány jako $\bar{\lambda}_a = J^{-\frac{1}{3}} \cdot \lambda_a$.

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \Theta) = \Psi_{vol}(J, \Theta) + \psi_{iso}(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, \Theta) \quad , \quad (3.6)$$

kde můžeme jednotlivé složky definovat

$$\Psi_{vol} = \kappa(\Theta) \cdot G(J) - e_0(J) \frac{\vartheta}{\Theta_0} + T(\Theta) \quad , \quad (3.7)$$

kde $\kappa(\Theta)$ je objemový modul závislý na teplotě a $G(J)$ je funkce J

$$\psi_{iso} = \sum_{a=1}^3 \bar{\omega}(\bar{\lambda}_a, \Theta) \quad , \quad (3.8)$$

kde $\bar{\omega}(\bar{\lambda}_a, \Theta)$ isochorická část Helmholtzovy volné energie

$$\bar{\omega}(\bar{\lambda}_a, \Theta) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p(\Theta)}{\alpha_p} \cdot (\bar{\lambda}_a^{\alpha_p} - 1) \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.9)$$

kde $\mu_p(\Theta)$ je modul ve smyku závislý na teplotě

$$\kappa(\Theta) = \kappa(\Theta_0) \frac{\Theta}{\Theta_0} \quad , \quad (3.10)$$

kde $\kappa(\Theta_0)$ je objemový modul za referenční teploty

$$\mu_p(\Theta) = \mu_p(\Theta_0) \frac{\Theta}{\Theta_0} \quad , \quad p = 1, \dots, N \quad , \quad (3.11)$$

kde $\mu_p(\Theta_0)$ je modul ve smyku při referenční teplotě

$$\vartheta = \Theta - \Theta_0 \quad . \quad (3.12)$$

Nyní musíme materiálový model upravit na jednoosou napjatost a uvažovat nestlačitelnost materiálu. Změna objemu vlivem teplotní roztažnosti podle (3.3)

Dále můžeme odvodit za předpokladu, že $J = J(\Theta) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad , \quad (3.13)$$

yní můžeme psát upravenou rovnici(3.6) v tomto tvaru,

$$\psi(\lambda, \Theta) = \frac{\Theta}{\Theta_0} \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p(\Theta_0)}{\alpha_p} \left[\lambda^{\alpha_p} + 2 \left(\frac{J}{\lambda} \right)^{\frac{\alpha_p}{2}} - 3 \right] + c_0 \left[\vartheta - \Theta \cdot \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \quad , \quad (3.14)$$

pro získání neo-Hookeovského modelu nyní stačí položit $N=1$, $\alpha_1=2$ a dostaneme výsledný tvar

$$\psi(\lambda, \Theta) = \frac{\Theta}{\Theta_0} \frac{\mu(\Theta_0)}{2} \left[\lambda^2 + 2 \left(\frac{J}{\lambda} \right) - 3 \right] + c_0 \left[\vartheta - \Theta \cdot \ln \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} \right) \right] \quad , \quad (3.15)$$

Při velkém nárůstu teploty dochází k fyzikálním i chemickým změnám v materiálu a modul ve smyku klesá. Potom na základě experimentů $\mu(\Theta_0)$ v (3.15) bude ve tvaru

$$\mu(\Theta_0) = \mu_0 + \mu_\Theta \left(1 - \frac{\Theta_0}{T_0} \right) \quad , \quad (3.16)$$

kde μ_0 je modul při referenční teplotě, konstanta μ_Θ modul vyjadřující změnu modulu μ_i na stupeň K, Θ_0 referenční teplota realizovaného stlačení, $T_0 = 293K$ je vztažná teplota. Potom vztah (3.15) pro Helmholtzovu volnou energii nabude tvaru

$$\psi(\lambda, \Theta) = \frac{\Theta}{\Theta_0} \frac{\mu_0 + \mu_\Theta \left(1 - \frac{\Theta_0}{T_0} \right)}{2} \left[\lambda^2 + 2 \left(\frac{J}{\lambda} \right) - 3 \right] + c \left[\vartheta - \Theta \cdot \ln \left(\frac{\Theta}{T_0} \right) \right] \quad . \quad (3.17)$$

Z této rovnice vypočteme druhé Piola-Kirchhofovo napětí podle rovnice (2.38)

$$S(\lambda, \Theta_o) = \frac{\mu_0 + \mu_\Theta \left(1 - \frac{\Theta_0}{T_0} \right)}{\lambda^2} \left[\lambda^2 - \left(\frac{J}{\lambda} \right) \right] \quad . \quad (3.18)$$

V tomto materiálovém modelu musíme určit tyto konstanty:

- $T_0 = 293 \text{ K}$
- c_0 je měrná tepelná kapacita pryže, tuto hodnotu nalezneme v literatuře,
- α_0 určíme pomocí experimentu
- μ_0 a μ_Θ aproximujeme pomocí proložení naměřených bodů křivkami

Pro další informace o hyperelastických modelech a jejich teplotních závislostech viz. v [1,14]

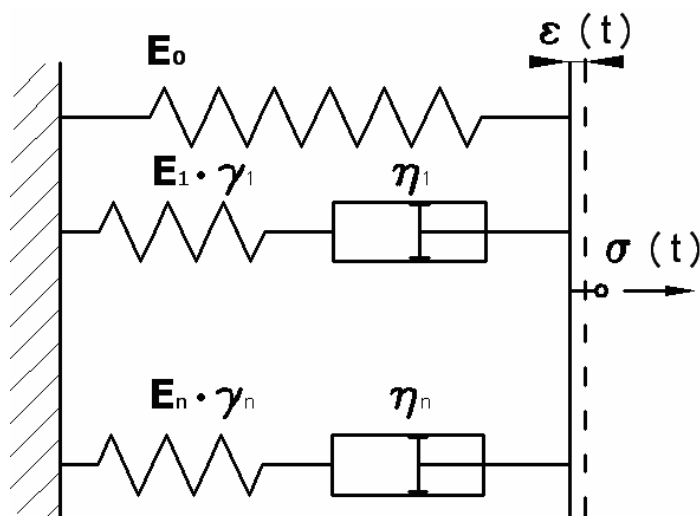
3.3 Viskoelastický model

Viskoelastické chování materiálů závisí na mnoha vnějších vlivech. Je nelineární vůči velikosti deformace a teplotě, například v [19] autoři popisují funkci, která vyjadřuje poměr mezi rychlostí relaxace a teplotou

$$\log a_T = \frac{-8.86(T - T_r)}{101.6 + T - T_r}, \quad (3.19)$$

kde T je absolutní teplota, T_r je teplota 50K nad teplotou skelného přechodu. Součinitelem a_T je třeba vynásobit relaxační čas stanovený při referenční teplotě T_r , abychom získali relaxační čas při teplotě T . Tato funkce předpovídá zrychlení relaxace v použitém rozmezí teplot přibližně 7x. Např. [20] tento vztah používají. Při realizovaném experimentu nebylo zrychlení relaxace pozorováno v tak velké míře, aby bylo možno tyto konstanty použít, proto jsme od použití této funkce upustili.

Viskoelastické chování popisujeme pomocí *reologických modelů*. Pro modelovanou pryž jsme zvolili lineární reologický model dle Obr. 7.



Obr. 7: Lineární reologický model

Tento model umožňuje modelovat napětí v závislosti na deformaci a času, a to pomocí lineárních tlumičů, které jsou popsány viskozitami η_1 až η_n . Pružiny označené veličinami E_0 až E_n znázorněné na Obr. 7, jsou Youngovy moduly, známé z lineární teorie pružnosti. Vnitřní proměnné γ_1 až γ_n jsou veličiny typu poměrné deformace, které popisují prodloužení příslušných pružin. Nyní sestavíme rovnici pro napětí. Napětí v rovnovážném stavu je napětí pouze od pružiny

$$\sigma_\infty = E_0 \cdot \varepsilon \quad , \quad (3.20)$$

kde, ε je poměrná deformace. Napětí ve větvi modelu lze vyjádřit jako

$$q_a = \eta_a \cdot \dot{\gamma}_a \quad , \quad (3.21)$$

pro každou větev modelu platí rovnováha sil

$$E_a \cdot \gamma_a(t) = \eta_a (\dot{\varepsilon}_a - \dot{\gamma}_a) \quad .a = 1, \dots, n, \quad , \quad (3.22)$$

pokud (3.22) derivujeme podle času, získáme evoluční rovnici

$$\dot{q}_a(t) + \frac{q_a(t)}{\eta_a} = E_a \cdot \dot{\varepsilon}_a(t) \quad , \quad (3.23)$$

Nyní, lze předpokládat bez omezení na obecnosti,

$$E_0 = \frac{E_a}{\beta_a} \quad , \quad \tau_a = \frac{\eta_a}{E_a} \quad , \quad (3.24)$$

kde β_a jsou bezrozměrné součinitele, $\tau_a = \frac{\eta_a}{E_a}$ příslušné časové konstanty.

$$\dot{q}_a(t) + \frac{q_a(t)}{\tau_a} = \beta_a \cdot E_0 \cdot \dot{\epsilon}_a(t) \quad , \quad (3.25)$$

kde součin $E_0 \cdot \dot{\epsilon}(t)$ má fyzikální význam časové derivace rovnovážného napětí. U hyperelastického materiálu můžeme celkové napětí předpokládat ve tvaru

$$S = S_{vol}^\infty + S_{iso}^\infty + \sum_{a=1}^n Q_a \quad , \quad (3.26)$$

kde Q_a značí overstress v příslušné větvi reologického modelu. Horní index ∞ značí, že jde o rovnovážné napětí (čas $t \rightarrow \infty$). V důsledku nestlačitelnosti je napětí $S_{vol}^\infty = 0$. Evoluční rovnici zobecníme na tříosou napjatost vztahem

$$\dot{Q}_a + \frac{Q_a}{\tau_a} = \beta_a \cdot \dot{S}_{iso}^\infty \quad . \quad (3.27)$$

Vyřešením této rovnice pro interval pro $t \in (0; T)$ získáme rovnici

$$Q_a = e^{\frac{-T}{\tau_a}} \cdot Q_{a0} + \beta_a \cdot \int_{t=0}^{t=T} e^{\frac{T-t}{\tau_a}} \dot{S}_{iso}^\infty dt \quad , \quad (3.28)$$

která se nazývá konvoluční integrál a konstanta Q_{a0} je overstress v časovém okamžiku $t=0$ (počáteční podmínka).

Při úvaze, že před počátkem zkoumaného časového intervalu bylo těleso teoreticky nekonečně dlouho nedeformováno (jako je tomu při prováděných experimentech) lze dosazením do rovnice (3.28) vyjádřit, že konstanta $Q_{a0} = 0$.

Celkové napětí je tedy dáno vztahem

$$S = S_{iso}^\infty + \sum_{a=1}^n \beta_a \cdot \int_{t=0}^{t=T} e^{\frac{T-t}{\tau_a}} \dot{S}_{iso}^\infty dt \quad . \quad (3.29)$$

kde $\sum_{a=1}^n \beta_a \cdot e^{-\frac{t}{\tau_a}}$, která vznikne po integraci, se nazývá Pronyho řada. Podle [8] můžeme

též viskoelastické chování modelovat pomocí výrazu $\beta \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^k}$, kde mocnina k nahrazuje Pronyho řadu, avšak tento výraz je méně vhodný pro numerické řešení a není implementován v ANSYSu, proto jsme zvolili Pronyho řadu. Více o problematice viskoelastických modelů [2,8,9,15].

4 Experiment

Za účelem zdokumentování vlastností pryže BAE 8534 byla provedena celá řada experimentů v laboratořích Technické univerzity v Liberci. Typy měření lze rozdělit charakterově do tří skupin.

- **Cyklické zatížení** pro odstranění *Mullinsova jevu*
- **Relaxační testy** za účelem zjištění hodnot rovnovážného napětí a viskoelastických vlastností materiálu
- **Zkouška teplotní roztažnosti** za účelem zjištění velikosti teplotní roztažnosti

4.1 Zkušební vzorky materiálu BAE 8534

Měření bylo provedeno na šesti zkušebních vzorcích ve tvaru kvádrů, které byly zhotoveny z vibroizolačních segmentů. Segmenty jsou vyráběny ve dvou velikostech, z toho důvodu jsou 3 vzorky větší a 3 menší. Rozměry vzorků jsou uvedeny v tab. 3.

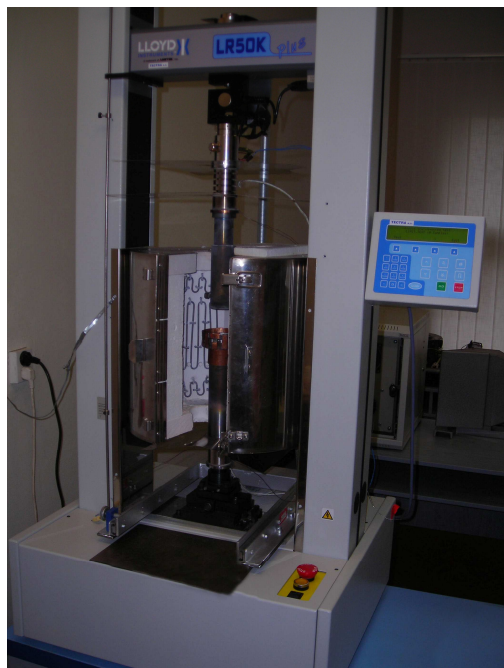
Rozměry vzorků $L \times A \times B$ [mm]			
číslo vzorku	Rozměry	číslo vzorku	Rozměry
1	43.8 x 27.1 x 22.5	4	43.8 x 29.7 x 26.6
2	44.1 x 26.6 x 22.3	5	43.5 x 30.2 x 26.3
3	43.9 x 26.6 x 22.2	6	43.3 x 30.1 x 26.5

Tab.3: Rozměry zkušebních vzorků

4.2 Metodika experimentů

4.2.1 Experimentální zařízení

Měření prováděné v rámci laboratoří TUL bylo realizováno v technologické laboratoři katedry sklářských strojů a robotiky, za použití laboratorního lisu LLOYD LR50K PLUS od firmy TECTRA a.s., osazeného 10kN siloměrem s přesností $\pm 50\text{N}$ s obslužným softwarem NEXYGEN verze 4.0 issue 9. Jedná se o dvousloupový mechanický lis. V příslušenství tohoto laboratorního lisu je vyhřívaná elektrická odporová laboratorní pec s rozsahem pracovních teplot do 1100°C od výrobce ELSKLO typ: TVTO3 (Obr. 8).



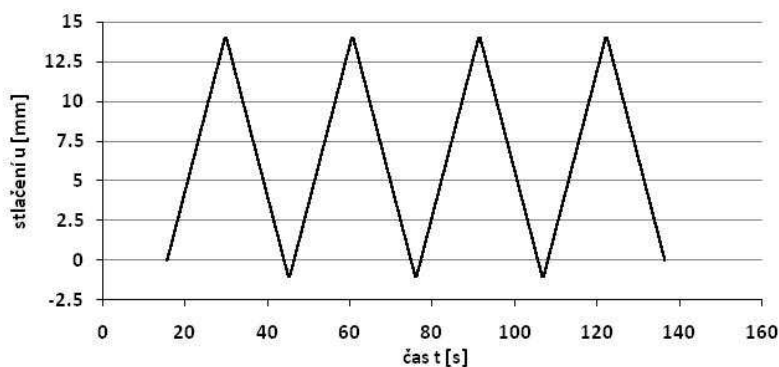
Obr. 8: Fotografie laboratorního lisu

Pro předehřev vzorků sloužila elektrická odporová pec MLV typ: 212.11 s teplotním rozsahem 0-1200 °C.

Pro stanovení teploty bylo použito odporových termočlánků typu K 2x0.8mm (NiCr-NiAl) a J 2x0.3mm (Fe-CuNi) s měřícím zařízením OMEGA CL25EC

4.2.2 Postup měření

Jako první operace bylo prováděno cyklické zatěžování za klimatických podmínek laboratoře za účelem potlačení Mullinsova jevu. Laboratorní lis stlačil 4x každý vzorek o 13 mm. Vzorky byly stlačovány v pozici „na výšku“.



Graf 1: Závislost stlačení – čas, předzatížení vzorků

Rychlost posuvu byla nastavena na 1mm s^{-1} tj. $\dot{\lambda}=0,022\text{s}^{-1}$. Jako kluzná vrstva, pro potlačení účinků tření o podložku, bylo zvoleno víceúčelové plastické mazadlo CASTROL LM GREASE na bázi lithia, určené pro použití i při zvýšených teplotách.

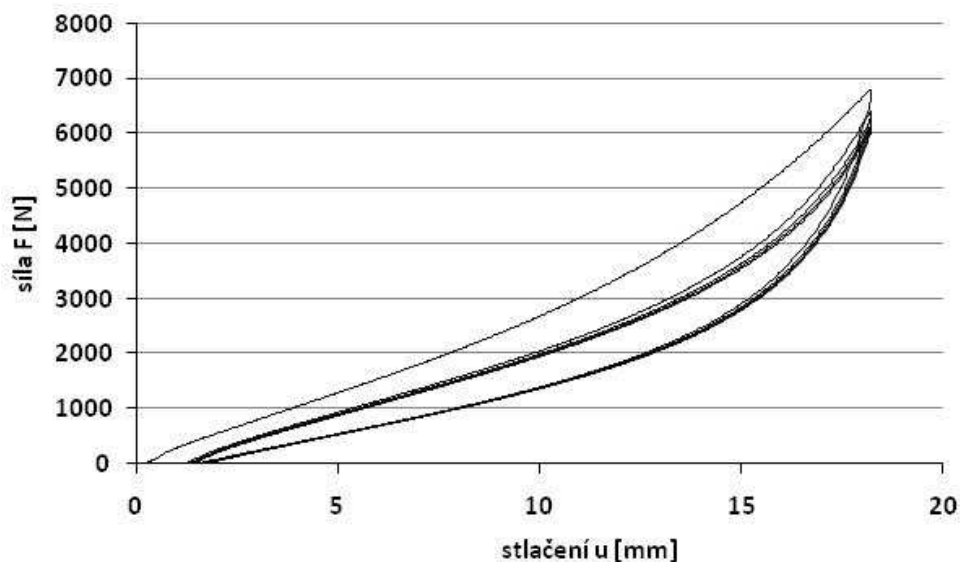
Po měření předzatížení následovala série testů za různých teplot, vzorky byly předeřívány po stanovenou dobu v pomocné peci MLV, poté vzorky byly při transportu mezi pecemi vzorky přeměřeny digitálním posuvným měřidlem zn. Mitutoyo a byla aplikovaná kluzná vrstva. V měřicí peci se vzorky nechali 20 minut teplotně ustálit a poté následovalo stlačení s 20 minutovou relaxací. Laboratorní lis byl spouštěn s rozjezdovou mezerou 17mm a rychlostí 8mm s^{-1} tj. $\dot{\lambda}=0,182\text{s}^{-1}$.

4.3 Omezení Mullinsova jevu pomocí cyklického zatížení

Přez je materiál vykazující při prvních několika cyklech vyšší odezvy napětí, tato skutečnost se nazývá Mullinsovův jev. V reálném provozu jsou obvykle součástí cyklicky zatěžovány, tudíž pro měření je nutno tento jev co nejvíce potlačit, což se provádí opakovaným stlačením za úroveň meze pozdějších předpokládaných deformací vzorků. Protože se porušené chemické vazby postupem času obnovují, jev se objevuje opakovaně, avšak ne již v plné výši.

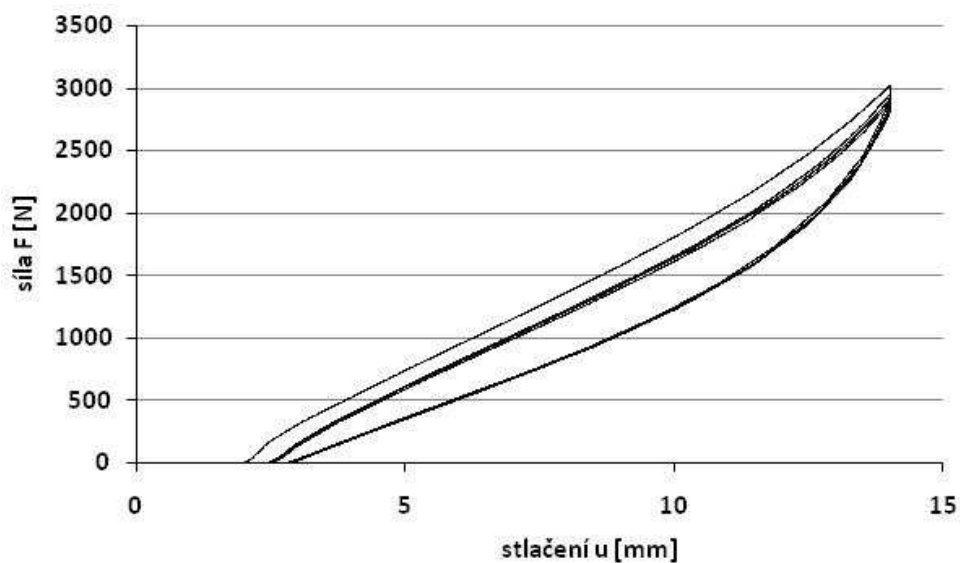
4.3.1 Obnovení účinku Mullinsova jevu v čase

Na (Graf 2) je zobrazeno změřené předzatížení z 1.3.2006 jež uvádí [21]. Z grafu je patrné, že Mullinsovův jev se projevil velmi výrazně např. při prvním stlačení o 7,5 mm, kdy je síla o 40% větší než při posledním cyklu zatížení.



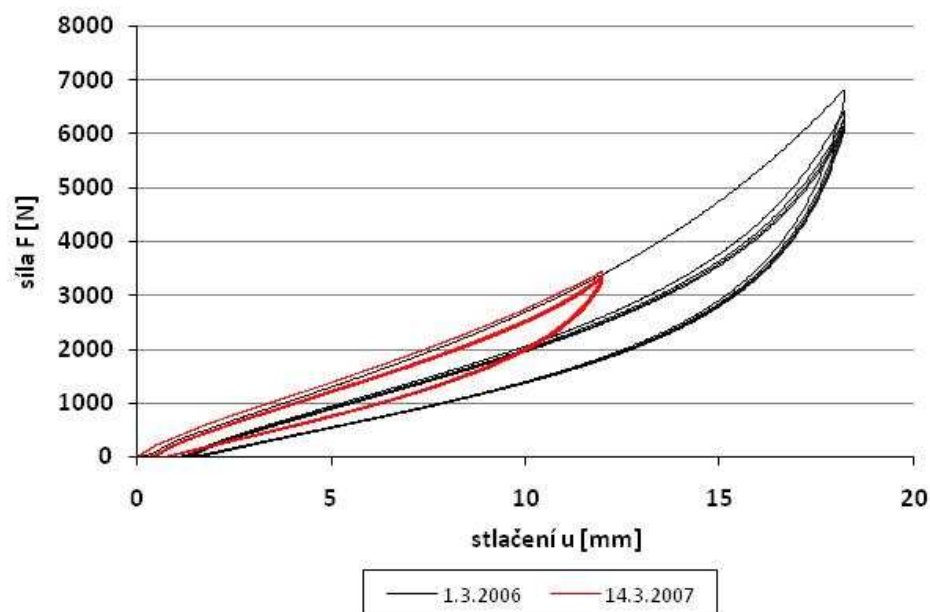
Graf 2: Závislost síla – stlačení, cyklické zatížení vzorku 2, 1.3.2006

Na (Graf 3) je zobrazena stejná závislost, avšak z 14.3.2007, při stlačení 10mm (7.5 po odečtení rozběhové mezery) je síla větší pouze již o 12%



Graf 3: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 2, 14.3.2007

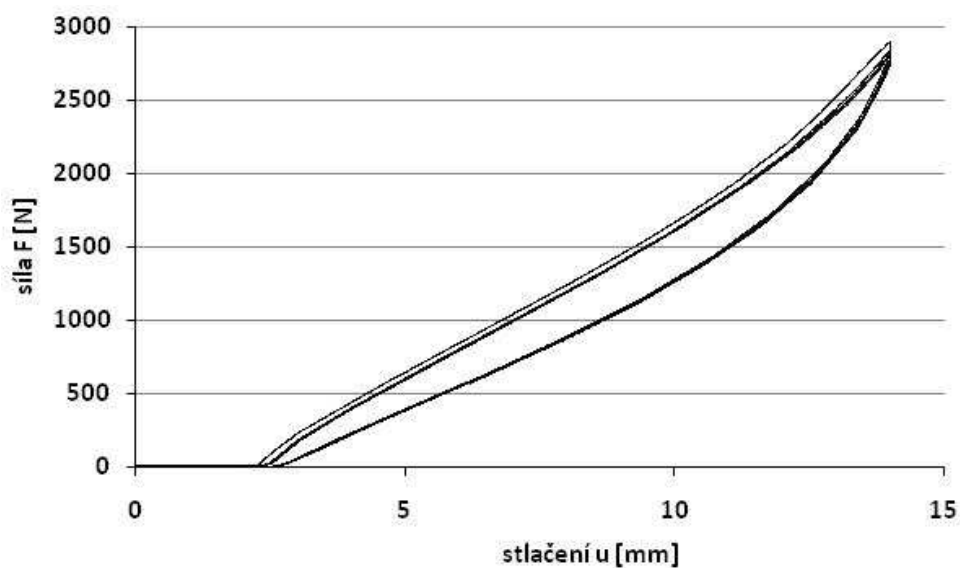
Následující závislost.(Graf 4) uspořádává (Graf 2, Graf 3) do jednoho a je jasné patrné, že pryž ztuhla, tudíž, rok staré testy již nelze použít a musí se měření kompletně opakovat.



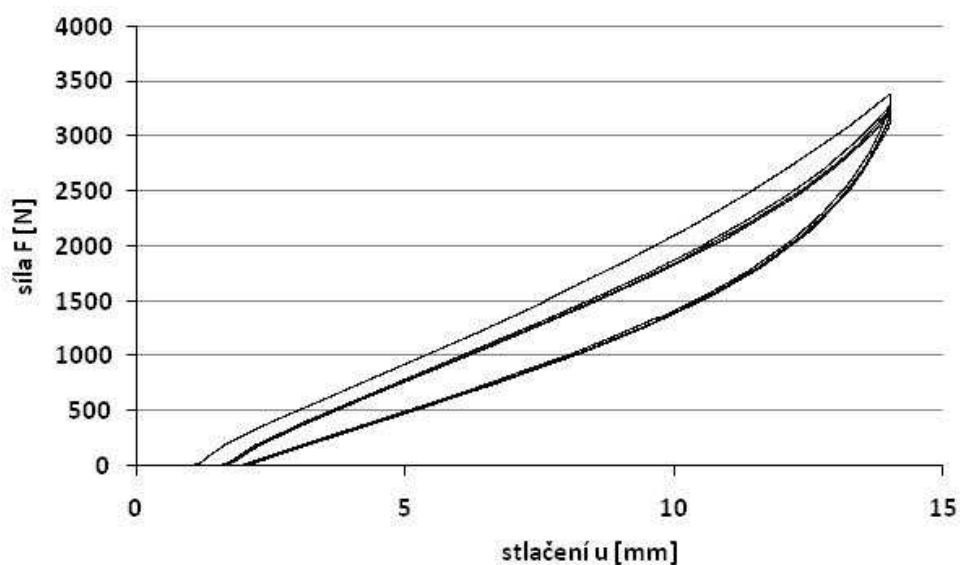
Graf 4: Závislost síla - stlačení, porovnání vzorku po roce

4.3.2 Cyklické testy ostatních vzorků

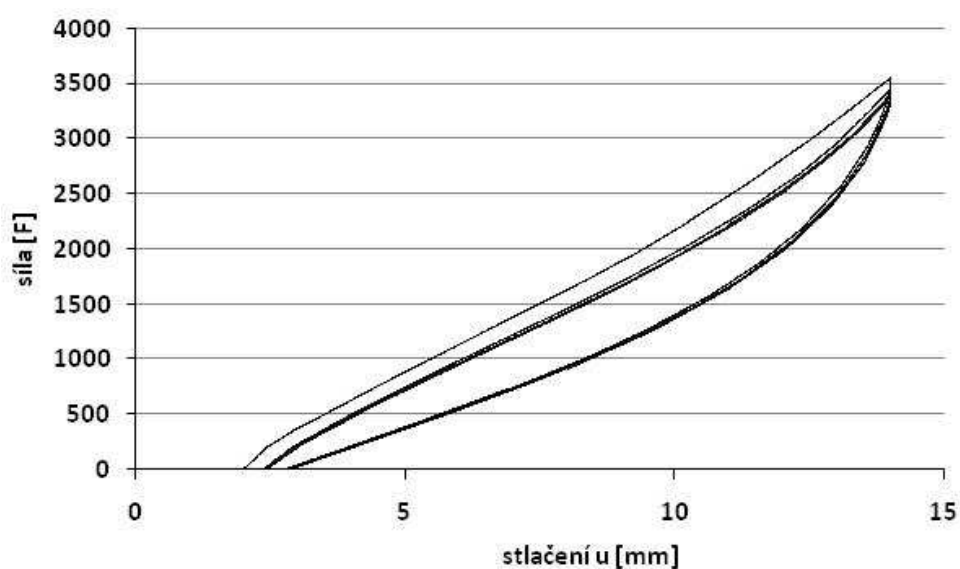
Následující série grafů (Graf 5-Graf 9) zobrazuje cyklické zatížení ostatních vzorků (2.-6.).



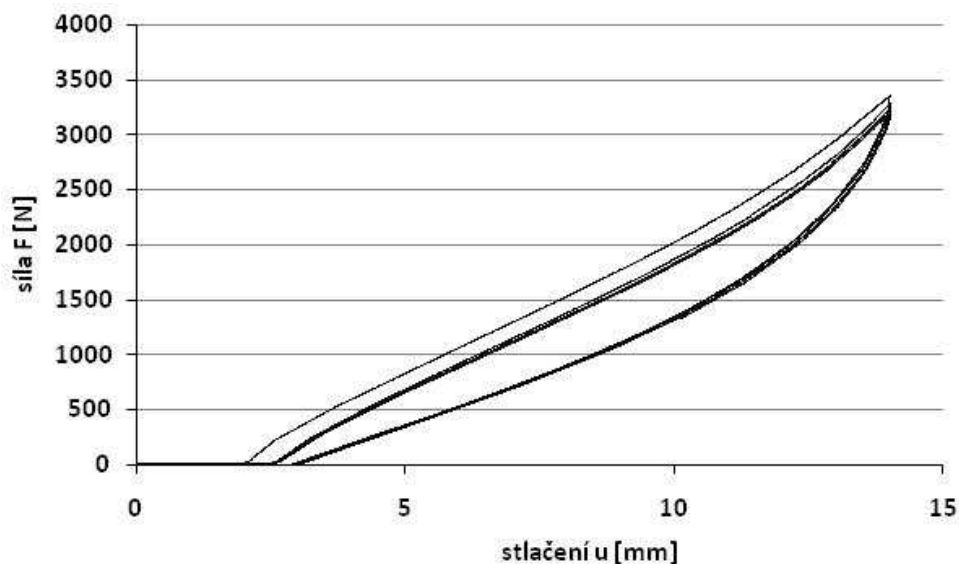
Graf 5: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 1



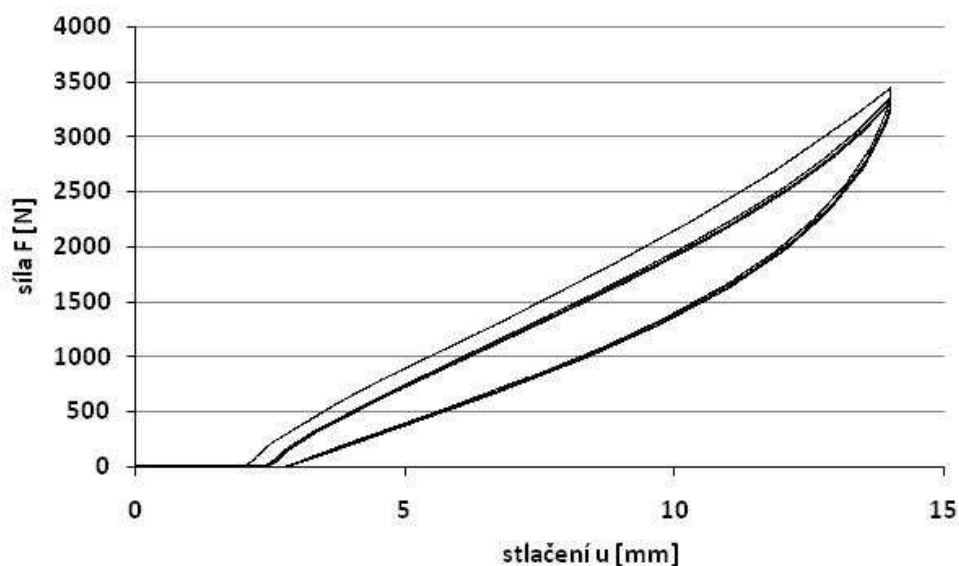
Graf 6: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 3



Graf 7: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 4



Graf 8: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 5



Graf 9: Závislost síla - stlačení, cyklické zatížení vzorku 6

4.4 Relaxační testy

Relaxační testy jsou zkoušky, při kterých vzorek stlačíme na určitou zvolenou úroveň a poté necháme *relaxovat* (zachováváme stlačení v čase). Z této zkoušky můžeme určit rovnovážné napětí pro výpočet konstant zvoleného hyperelastického modelu a relaxační křivky.

V případě stanovení závislosti vlastností na teplotě, musíme tuto zkoušku opakovat pro každou teplotu znova, což je značně časově náročné.

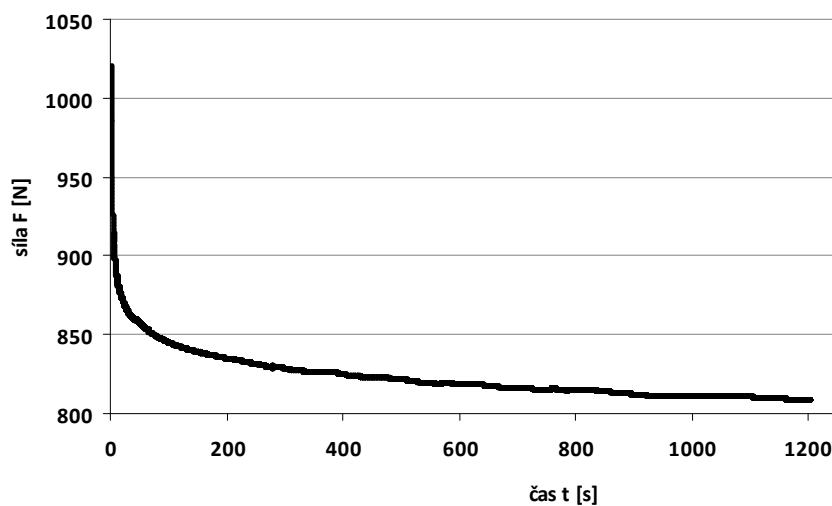
4.5 Měření při teplotě 20°C

Pro měření za této teploty byla teplotní komora odpojena. Tab. 5 ukazuje hodnoty realizovaného stlačení při této teplotě.

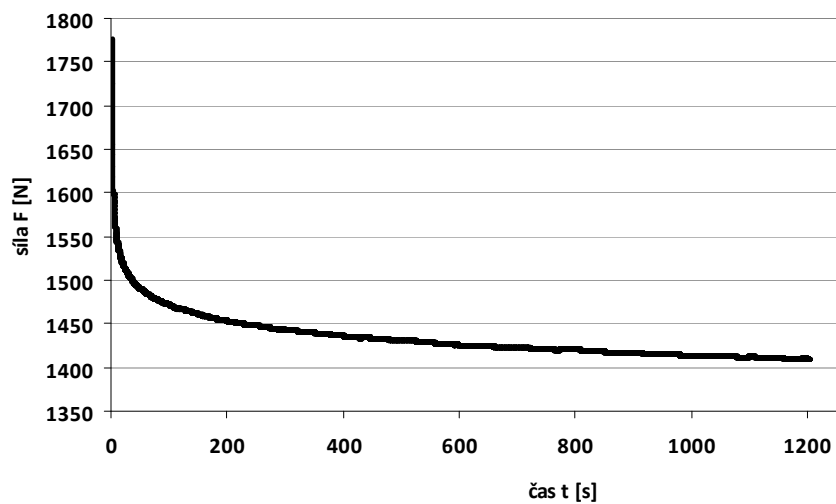
vzorek číslo	stlačení [mm]	vzorek číslo	stlačení [mm]
1.	4.49	4.	4.85
2.	7.56	5.	7.75
3.	10.23	6.	9.91

Tab. 4: Stlačení při teplotě 20°C

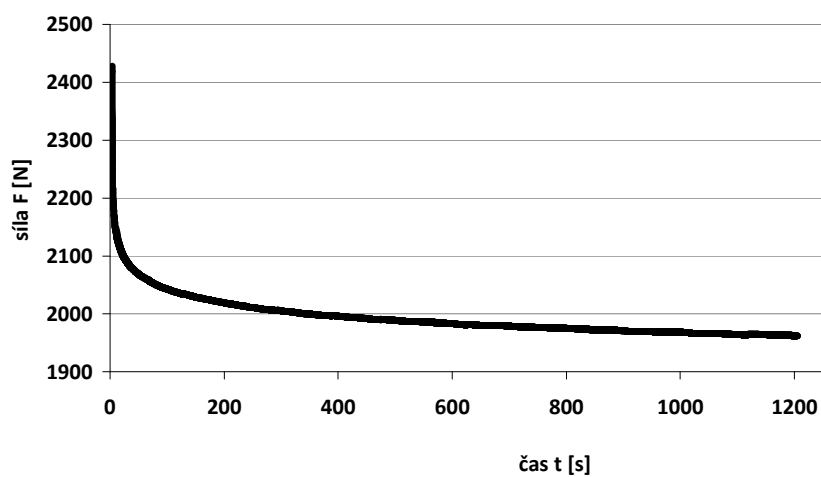
Graf 10 až Graf 15 zobrazují průběh relaxace po dobu měření 1200s. Tato hodnota byla zvolena s ohledem na časovou a energetickou náročnost zkoušek, je kompromisem mezi rychlostí zkoušek a úplnou relaxací do rovnovážného stavu při $t = 1200$ s.



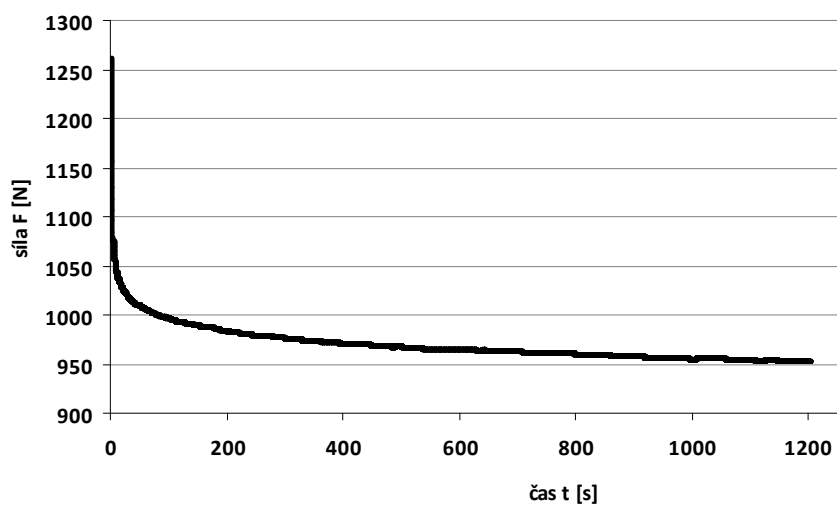
Graf 10: Závislost síla - čas, vzorek 1, 20°C



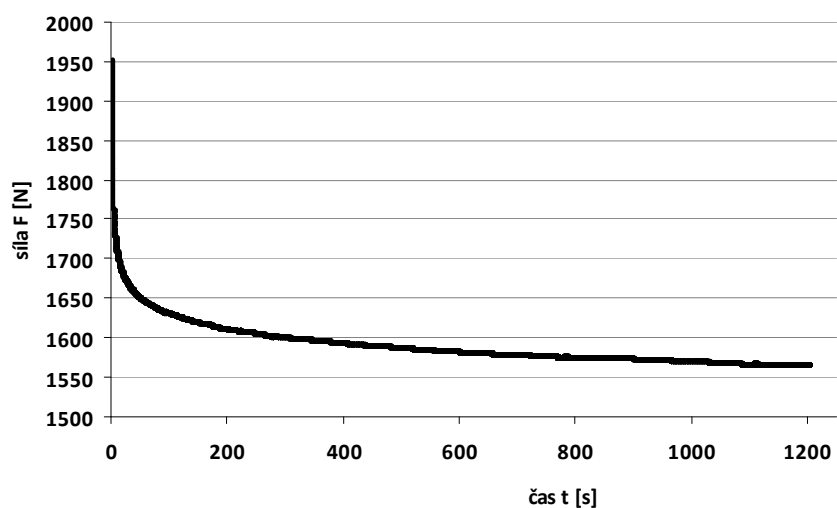
Graf 11: Závislost síla - čas, vzorek 2, 20°C



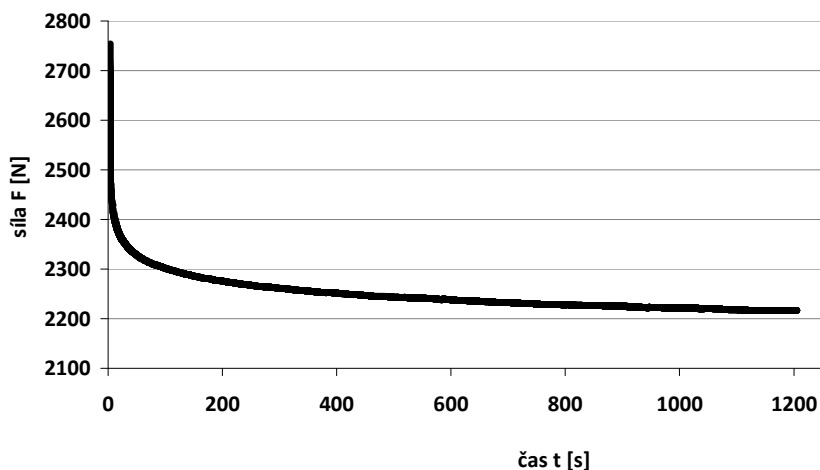
Graf 12: Závislost síla - čas, vzorek 3, 20°C



Graf 13: Závislost síla - čas, vzorek 4, 20°C



Graf 14: Závislost síla - čas, vzorek 5, 20°C



Graf 15: Závislost síla - čas, vzorek 6, 20°C

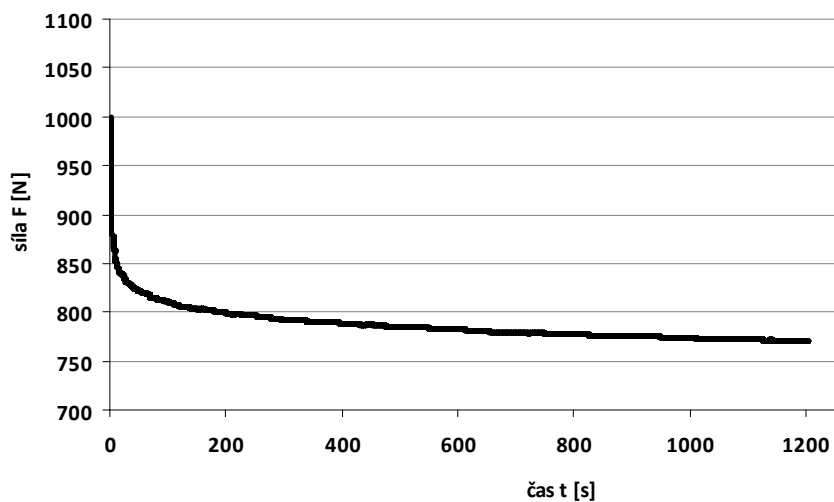
4.6 Měření při teplotě 40°C

Při této teplotě se předehřívalo 40 min v pomocné peci, navíc 20 min se v měřicí peci kompenzovala ztráta teploty při transportu. Teplota pecí byla sledována termočlánky. Před měřením byl jeden zkušební vzorek obdobných rozměrů nahříván, abychom zjistili, jestli se za 40 min zcela prohřeje. Viz. kap. 5.6.. Tab. 5 ukazuje hodnoty realizovaného stlačení při 40°C. Dosažená přesnost teploty v peci v průběhu měření byla $T \in (39,5 ; 41,5)^\circ \text{C}$, dle měření pomocí termočlánků.

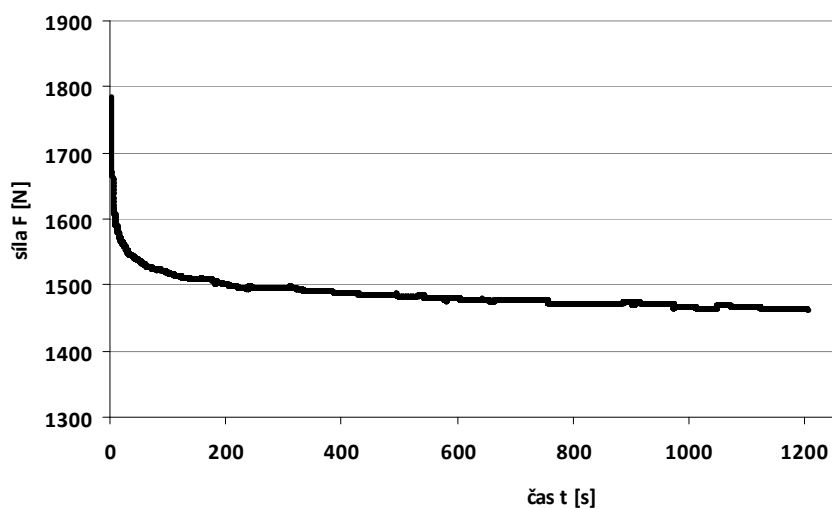
vzorek číslo	stlačení [mm]	vzorek číslo	stlačení [mm]
1.	4.23	4.	4.23
2.	7.46	5.	6.74
3.	9.71	6.	9.41

Tab. 5: Stlačení při teplotě 40°C

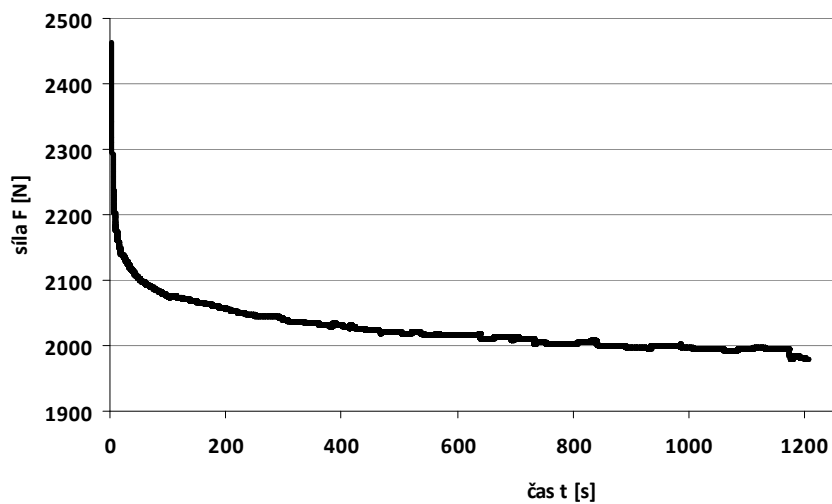
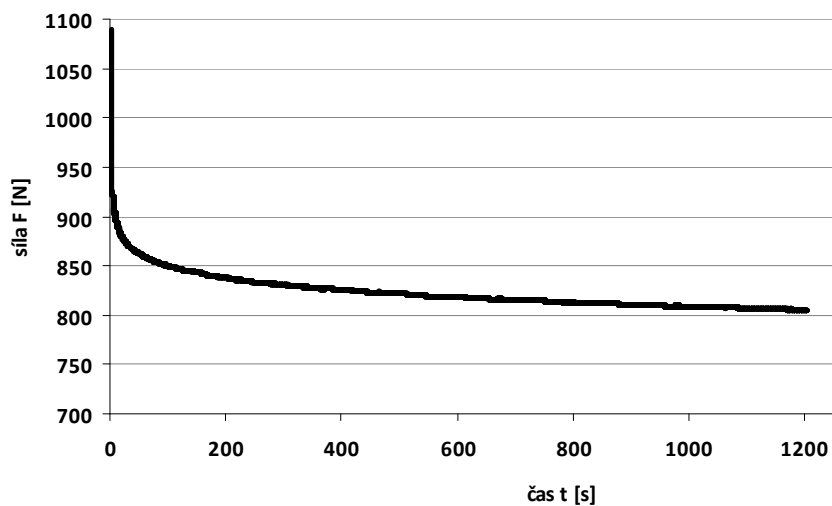
Graf 16 až Graf 21 zobrazují průběh relaxace po dobu měření $t=1200$ s.

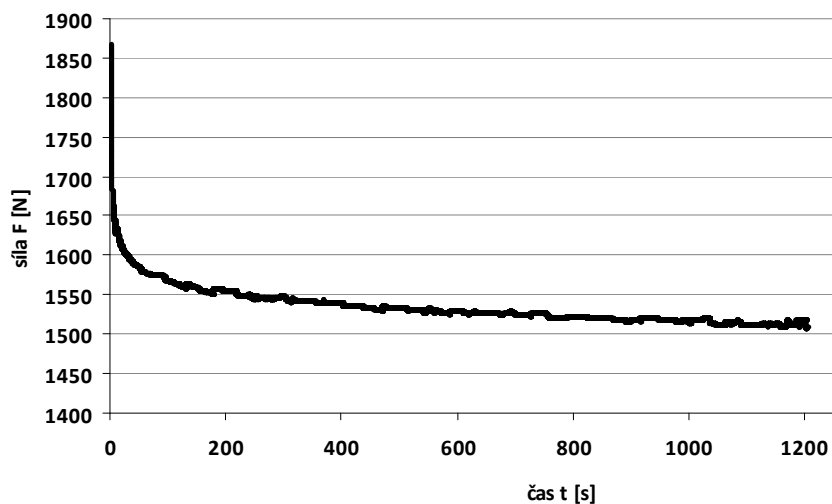
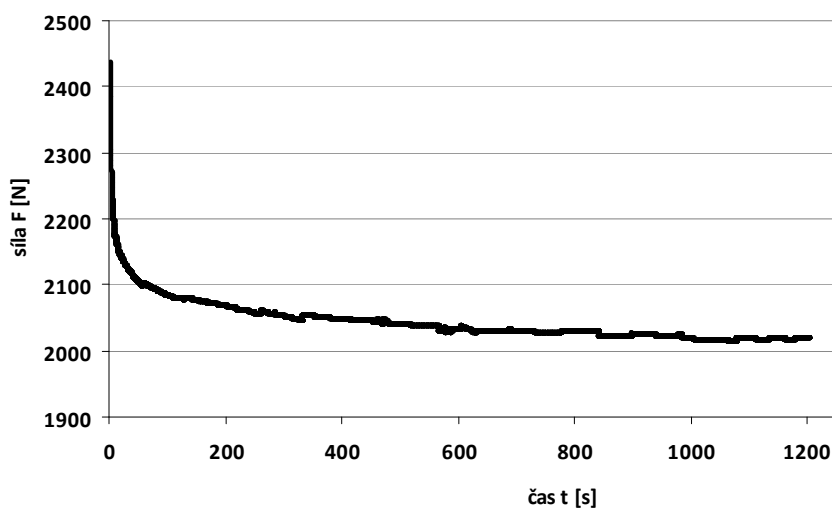


Graf 16: Závislost síla - čas, vzorek 1, 40°C



Graf 17: Závislost síla - čas, vzorek 2, 40°C

Graf 18: Závislost síla - čas, vzorek 3, 40°C Graf 19: Závislost síla - čas, vzorek 4, 40°C

Graf 20: Závislost síla - čas, vzorek 5, 40°C Graf 21: Závislost síla - čas, vzorek 6, 40°C

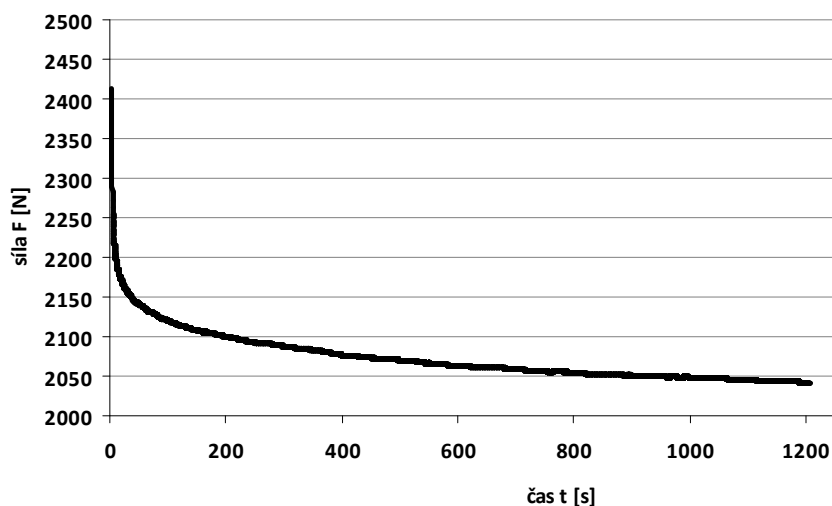
4.7 Měření při teplotě 80°C

Při této teplotě se předehtřívalo 80 min v pomocné peci + 20 min v měřicí peci, ostatní podmínky stejné jako u 40°C. Tab. 6 zobrazuje stlačení jednotlivých vzorků při relaxační zkoušce. Dosažená přesnost teploty v peci v průběhu měření byla $T \in (79,5 ; 81,5)^\circ\text{C}$, dle měření pomocí termočlánků.

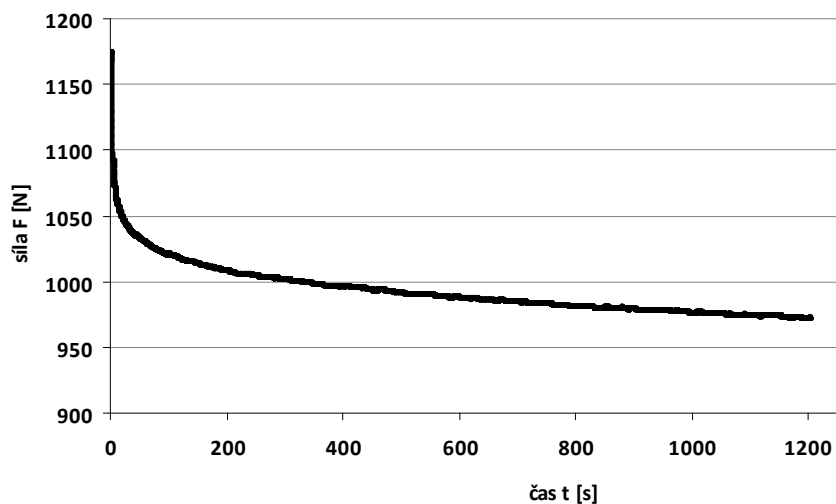
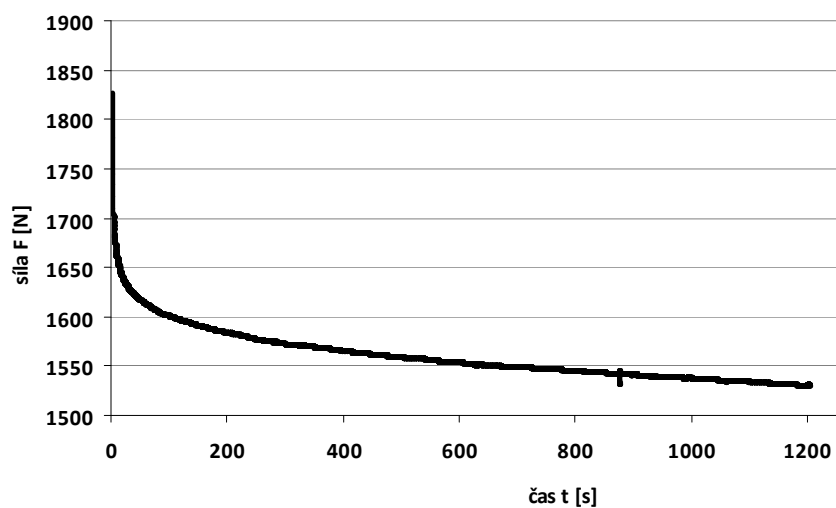
vzorek číslo	stlačení [mm]	vzorek číslo	stlačení [mm]
1.	10.6	4.	10.05
2.	5.32	5.	4.84
3.	8.11	6.	7.68

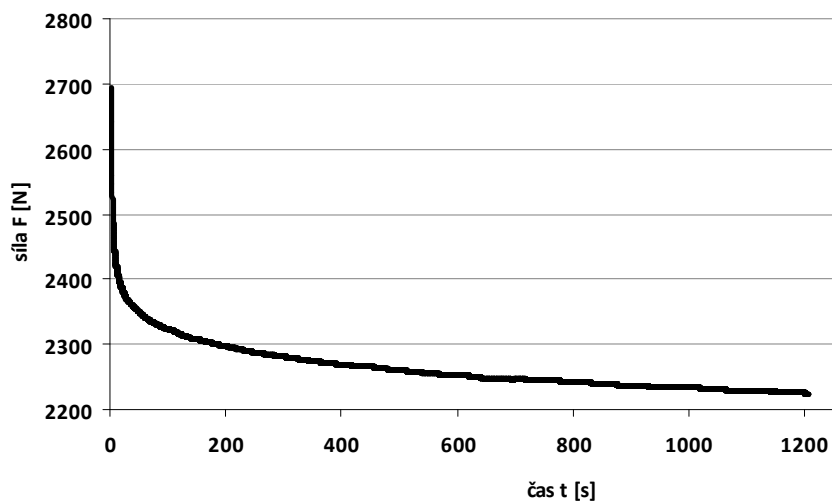
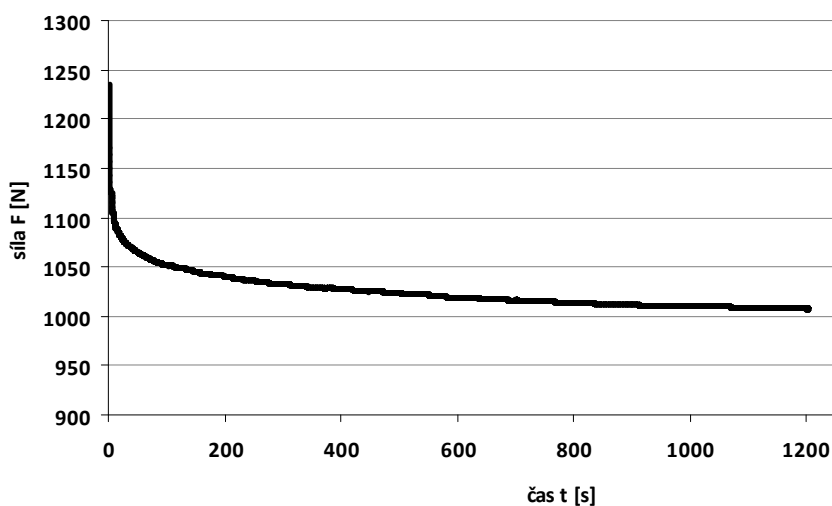
Tab. 6: Stlačení při teplotě 80°C

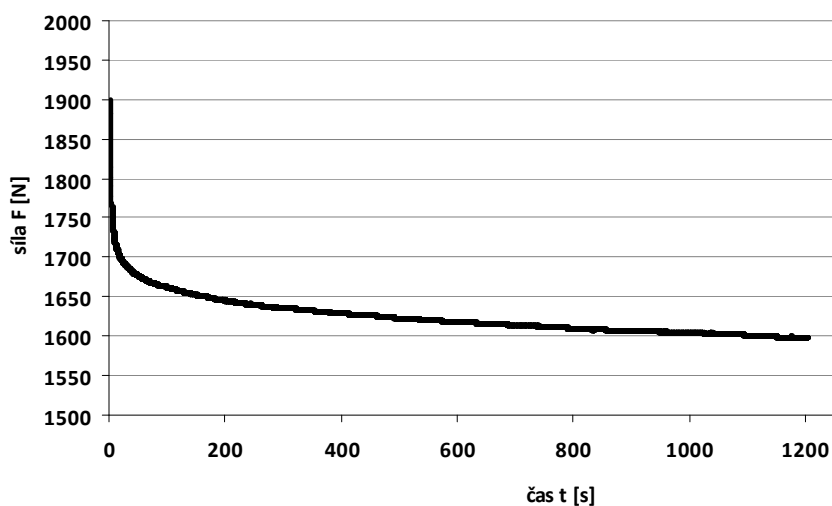
Graf 22 až Graf 27 ukazují závislosti síly na čase v průběhu 1200s.



Graf 22: Závislost síla - čas, vzorek 1, 80°C

Graf 23: Závislost síla - čas, vzorek 2, 80°C Graf 24: Závislost síla - čas, vzorek 3, 80°C

Graf 25: Závislost síla - čas, vzorek 4, 80°C Graf 26: Závislost síla - čas, vzorek 5, 80°C



Graf 27: Závislost síla - čas, vzorek 6, 80°C

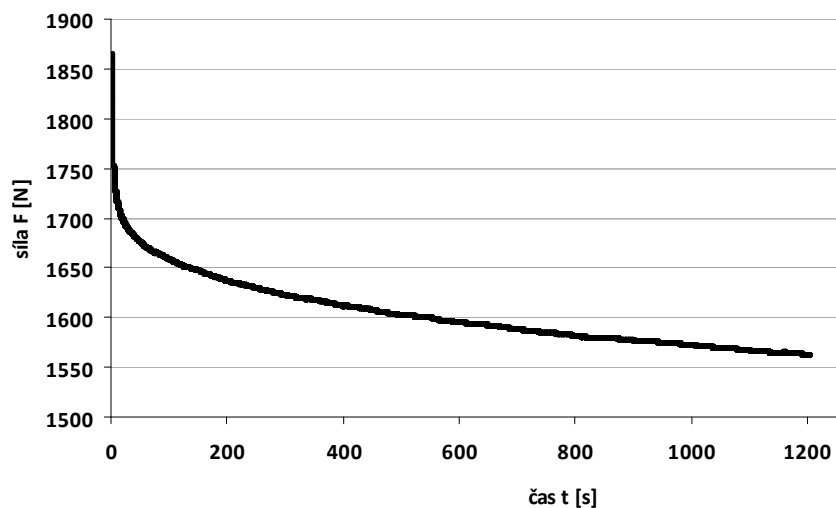
4.8 Měření při teplotě 100°C

Stejné podmínky jako u 80°C. v Tab. 7 jsou vypsány hodnoty stlačení jednotlivých vzorků. Dosažená přesnost teploty v peci v průběhu měření byla $T \in (98,5; 102,5)^\circ\text{C}$, dle měření pomocí termočlánků.

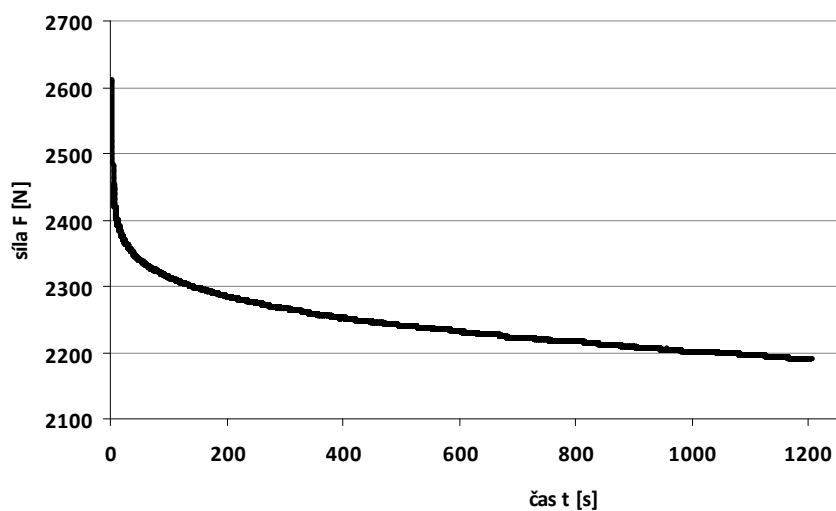
vzorek číslo	stlačení [mm]	vzorek číslo	stlačení [mm]
1.	8.65	4.	8.23
2.	11.39	5.	11.19
3.	5.41	6.	5.51

Tab. 7: Stlačení při teplotě 100°C

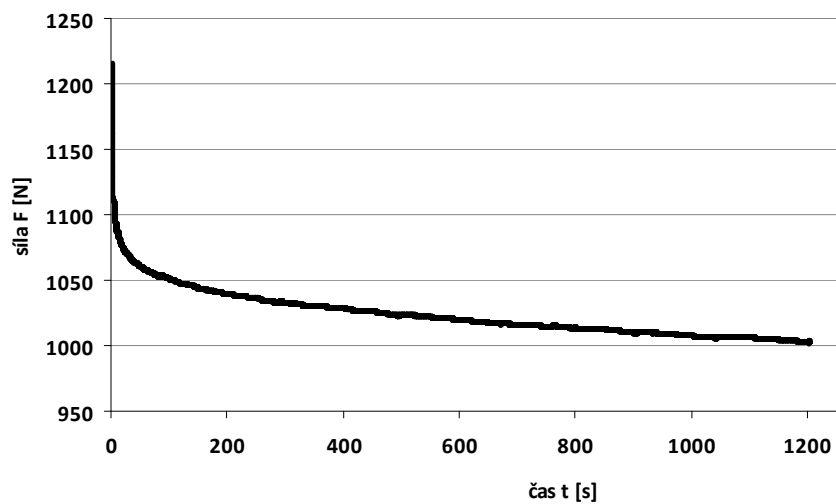
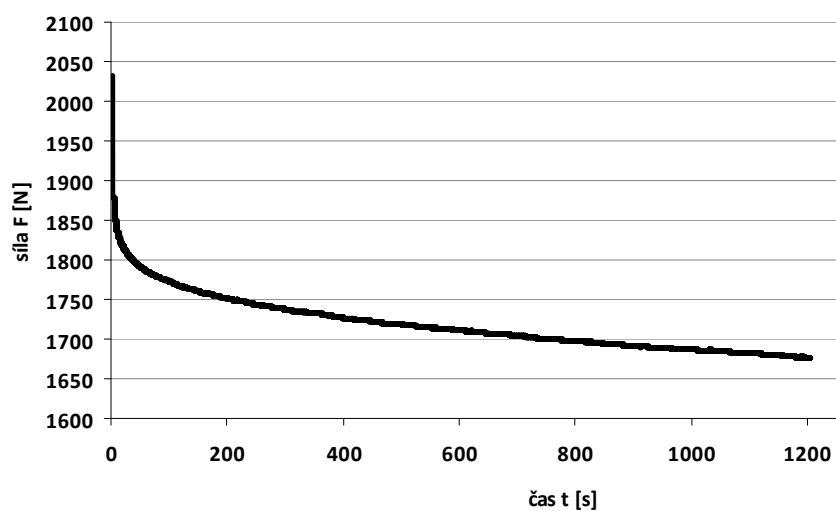
Graf 28 až Graf 33 ukazují závislosti síly na čase.

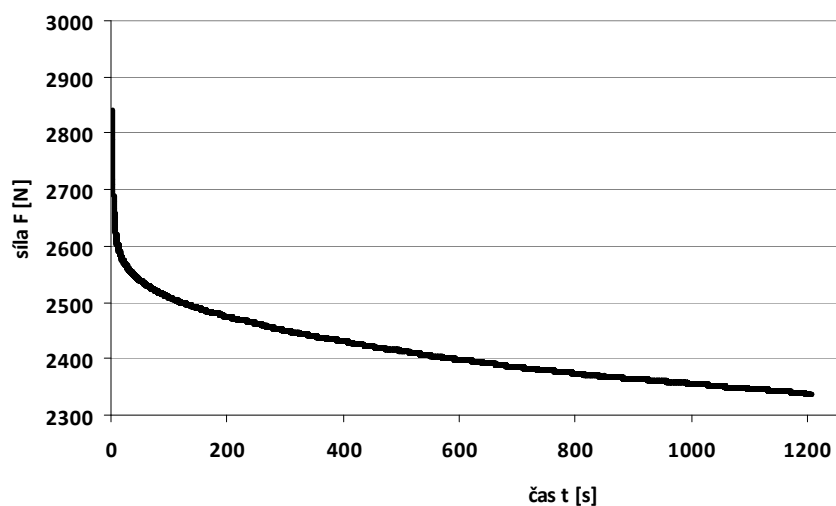
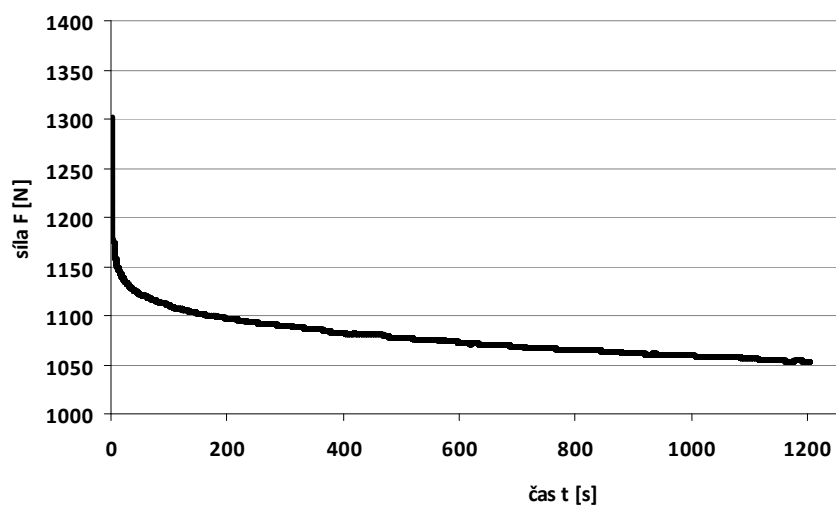


Graf 28: Závislost síla - čas, vzorek 1, 100°C



Graf 29: Závislost síla - čas, vzorek 2, 100°C

Graf 30: Závislost síla - čas, vzorek 3, 100°C Graf 31: Závislost síla - čas, vzorek 4, 100°C

Graf 32: Závislost síla - čas, vzorek 5, 100°C Graf 33: Závislost síla - čas, vzorek 6, 100°C

4.9 Zkoušky teplotní roztažnosti

Materiálový model vyžaduje znát součinitel teplotní roztažnosti α . Pro tento účel, byl každý vzorek při přenášení mezi pecemi přeměřen digitálním posuvným měřidlem. Předpokladem pro toto měření je správná doba předehtání v komoře, což bylo zajištěno změřením teploty ve středu pomocného vzorku termočlánkem (viz. kap.5.6), a druhým předpokladem je, že vzorky při zvýšené teplotě rychle relaxují do původního tvaru, přestože byly již stlačeny. Tento předpoklad potvrdilo opakované měření rozměrů za studena před vložením do pece a dále podpořilo časové prodloužení mezi zkoušky.. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v Tab. 8.

při laboratorní teplotě 20°C				při teplotě 80°C			
vzorek č.	L[mm]	A[mm]	B[mm]	vzorek č.	L[mm]	A[mm]	B[mm]
1	43.8	27.1	22.5	1	44.37	27.45	22.52
2	44.1	26.6	22.3	2	44.4	26.8	22.68
3	43.9	26.6	22.2	3	44.47	26.77	22.4
4	43.8	29.7	26.6	4	44.11	30.29	26.78
5	43.5	30.2	26.3	5	44.11	30.33	26.68
6	43.3	30.1	26.5	6	44.17	30.25	26.7
při teplotě 40°C				při teplotě 100°C			
vzorek č.	L[mm]	A[mm]	B[mm]	vzorek č.	L[mm]	A[mm]	B[mm]
1	44.05	27.31	22.48	1	44.69	27.45	22.62
2	44.13	26.7	22.56	2	44.22	26.86	22.59
3	44.15	26.69	22.35	3	44.61	26.81	22.49
4	43.66	30.11	26.62	4	44.22	30.4	26.9
5	43.74	30.24	26.49	5	44.55	30.34	26.66
6	43.76	30.25	26.52	6	44.26	30.41	26.75

Tab. 8: Velikosti vzorků při různých teplotách

kde L odpovídá délce vzorku, A je druhý největší rozměr, C je poslední rozměr.

5 Zpracování naměřených dat, určení konstant modelu

5.1 Formát experimentálních dat, úprava před výpočtem.

Obslužný program laboratorním lisu exportoval naměřená data na do tabulky hodnot, jednalo se o 16000 datových trojic (čas [s], síla [N], posunutí měřicí hlavy [mm]) pro každé stlačení a teplotu. Z důvodu nutnosti rozjezdové mezery při měření, bylo nutno před jakýmkoliv výpočtem tuto mezeru z dat odstranit. Hodnota posuvu $u=0$ mm znamená, že při tomto stlačení reakce začala narůstat. Dále bylo nutno nalézt počátek a konec relaxace, a data zachovat pouze mezi těmito pozicemi. Na počátku relaxace bylo nutno uplynulý čas odstranit, což bylo realizováno položením času $t=0$ s při maximální hodnotě reakce.

Jako druhý krok úprav dat následovalo jejich vyčištění a zredukování. Protože relaxační křivky jsou obvykle modelovány jako exponenciály, bylo zvoleno postupné proložení dat třemi exponenciály ve tvaru,

$$F_i = a_1 \cdot e^{-t \cdot \beta_1} + a_2 \cdot e^{-t \cdot \beta_2} + a_3 \cdot e^{-t \cdot \beta_3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

tedy celkem 18 koeficientů.

Tab. 9. znázorňuje rozložení F_i , v průběhu dat a jejich překrývání pro zajištění návaznosti křivek.

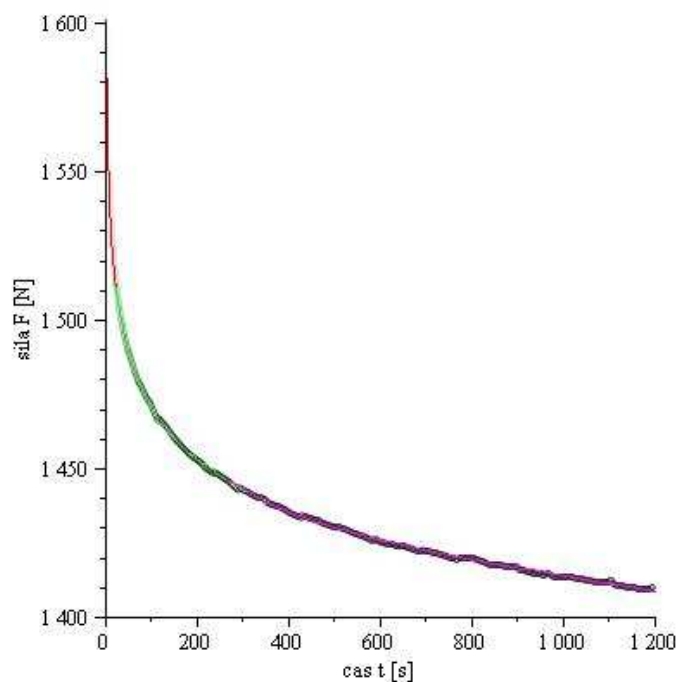
Proložená exponenciála	Výpočet z hodnot	Platnost ve výsledné exponenciále	Platnost převedená na čas relaxace [s]
F_1	1-400	1-300	22,5
F_2	201-4500	301-4000	22,5-304
F_3	3500-16000	401-16000	304-1200

Tab. 9: Rozložení částečných proložení

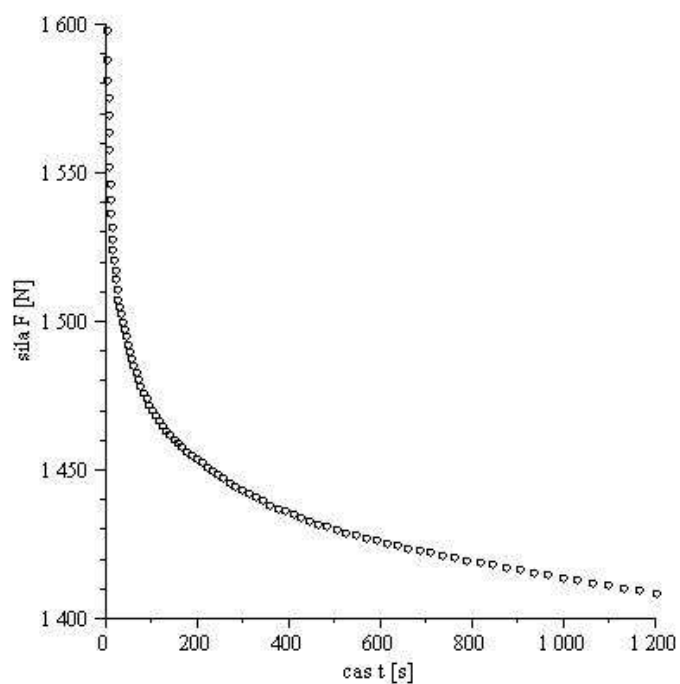
Graf 34. znázorňuje proložení naměřenými hodnotami u vzorku 3 při teplotě 40°C. Po proložení křivek byl proveden výpočet nových hodnot, přičemž pro výpočty relaxačních koeficientů bylo zapotřebí mít větší četnost dat na počátku relaxace, protože děj je velice rychlý, na konci děje stačila menší četnost, proto byla zvolena četnost dat podle vztahu (5.2)

$$t = p^2 \cdot \frac{1200}{99^2}, \quad p = 0..99, \quad (5.2)$$

Nové hodnoty znázorňuje Graf 35. Vztah (5.2) určuje čas t , dosažený do rovnice (5.1)



Graf 34: Proložení hodnot exponenciálou



Graf 35: Rozložení proložených hodnot v čase

5.2 Určení součinitele teplotní roztažnosti α

Tento součinitel je počítán podle hodnot z Tab. 8 a vztahu (3.2). Vypočítanou hodnotu α pro každou teplotu ukazuje Tab. 10, jedná se o průměry hodnot z 18 měřených délek pro každou teplotu.

T [°C]	40	80	100
α [1/K]	0.00023969	0.000172	0.000159

Tab. 10: Hodnoty α podle teploty

Protože byl předpokládáný koeficient teplotní roztažnosti α pouze lineární, bylo potřeba získané koeficienty z provedených měření mezi sebou zprůměrovat, přičemž vyšší změně teploty byla připsána vyšší váha, protože relativní chyba vyšších teplot je menší. Výsledný součinitel teplotní roztažnosti α tedy za tohoto předpokladu vychází $\alpha=0.00018 \text{ K}^{-1}$. Pro porovnání v Tab. 11 jsou zapsány hodnoty, které lze nalézt v literatuře (nejedná se o BAE8534)

Autor	A [1/K]
Shaw [4]	0.000209
Holzapfel [9]	0,0002233

Tab. 11: Tepelná roztažnost pryže

5.3 Určení měrné tepelné kapacity c

Součinitel měrné tepelné kapacity nešel za daných podmínek experimentálně určit, vzhledem k nedostatečnému vybavení. Různé publikace uvádějí různou hodnotu součinitele (pro různé pryžové varianty), ale v literatuře se vyskytují velice častou pouze pod obecnou kolonkou pryž, bez specifikace normy nebo typu, nebo nejlépe chemického složení.

Autor	c [kJ/kgK]
Kostial [18]	1,17
Holzapfel [9]	1,83
Shaw [4]	1,560

Tab. 12: Měrná tepelná kapacita pryže

Ve výpočtech je použita hodnota $c=1.83 \text{ kJ/kgK}$

5.4 Určení součinitele tepelné vodivosti λ

Součinitel teplotní vodivosti se v literatuře obvykle nalézá společně se součinitelem tepelné kapacity, v literatuře lze nalézt

Autor	λ [W/mK]
Saxena [11]	0,2
Shaw [4]	0.211
Košťal [18]	0.28

Tab. 13: Hodnoty součinitele teplotní vodivosti pryže

Ve výpočtech je použita hodnota $\lambda=0.28$ W/mK

5.5 Určení hustoty ρ

Hustota se určuje ze základního fyzikálního vztahu

$$\rho = \frac{m}{V} \quad , \quad (5.3)$$

kde objem V určíme z (Tab. 8). Hmotnost m všech vzorků je 219g, což bylo změřeno na digitální váze s přesností ± 1 g. Výsledná hustota je $\rho=1200$ kg/m³.

5.6 Stanovení minimální doby ohřevu

Při stanovení doby ohřevu jsme použili numerickou simulaci v ANSYS, protože je velmi obtížné věrohodně určit součinitel přestupu tepla α a tudíž neznáme přesně Biotovo číslo Bi , nemůžeme si být jistí, o jaký typ tělesa se jedná z hlediska vedení tepla.

$$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} \quad , \quad (5.4)$$

kde L je charakteristický rozměr, λ tepelná vodivost.

Uvažujeme-li $\alpha = (5;50)$ vychází $Bi = (0.262;2.62)$, tedy jedná se kombinovaný problém vedení i přestupu tepla. Pro analýzu v ANSYSu jsme uvažovali pouze problém vedení, okrajová podmínka je, že teplota stěny je totožná s teplotou v peci. Výsledky analýzy shrnuje Tab. 14

Cílová teplota [°C]	Dosažená teplota [°C]	Čas nutný pro dosažení teploty [min]	Realizovaný čas při experimentu [min]
40	39	16	40+20
80	79	21	80+20
100	99	23	80+20

Tab. 14: Simulované doby ohřevu

Protože jsme v simulaci úplně zanedbali přestup tepla, lze brát výsledky jen informativně, za jak dlouho se těleso prohřeje, skutečný nutný čas ohřevu jsme ověřili termočlánkem vloženým ve vzorku, viz. kap.. 4.6. Z tabulky vyplívá, že čas ohřevu vzorků jsme se snažili maximalizovat v únosné míře, která by neúměrně nezdržovala experimenty.

Předehřev 40 min byl zvolen s ohledem na délku použití měřící pece na každý vzorek, tak aby ani jedno zařízení nemělo zbytečné prostoje. Při 80 minutovém ohřevu byly v peci 2 vzorky, ze stejného důvodu.

Dohřev po přenesení 20min byl zvolen z důvodu nutnosti eliminovat nepřesnosti v teplotě, měřící pec měla přesnější regulaci, avšak, při otevření pece došlo k velkému úniku tepla a tím pádem k poklesu teploty. Regulační automatika tento výkyv regulovala přibližně 10 min, dalších 10 min bylo pro zvýšení objektivitu měření. Pro podrobnosti o problematice sdílení tepla viz. [5]

5.7 Určení parametrů použitého neo-Hookeova modelu

V této podkapitole je popsán postup, jak dosadit do vztahu (3.18) a získat tím po aplikování metody lineárních nejmenších čtverců parametry reprezentující rovnovážné vlastnosti zkoumané pryže. Nejprve si shrneme použité, předem určené parametry modelu. $c=1,83 \text{ kJ/kgK}$, $\alpha=0.00018 \text{ [1/K]}$, zvolíme referenční teplotu $^{\circ}\Theta=293\text{K}$.

Z každého stlačení jsme si předem upravili tabulky hodnot (kap. 5.1). Je k dispozici celkem 24 relaxačních křivek o 100 hodnotách. Pro výpočet rovnovážného napětí použijeme z každé křivky poslední hodnotu, tj. hodnotu v čase $t=1200\text{s}$.

Protažení λ pro jednoosou napjatost za referenční teploty lze definovat jako

$$\lambda = \frac{-u}{L_o} + 1, \quad (5.5)$$

pro zahřátý vzorek musíme v (5.5) deformaci od teploty odečíst, protože materiálový model předpokládá, že před stlačováním, nebyl vzorek nijak ovlivněn.

$$\lambda = \frac{-u}{L_o} + 1 + \alpha(\Theta - \Theta_0), \quad (5.6)$$

kde u je stlačení podle tabulky, L_o je délka vzorku. Cauchyho skutečné napětí definujeme jako,

$$\sigma = \frac{P}{Pl_{skut}} = \frac{P}{A_0 \lambda_2 \cdot B_o \lambda_3 \cdot (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^2}, \quad (5.7)$$

kde P je síla naměřená na siloměru, A_0, B_o jsou délky hran podstavy. Protože se jedná o jednoosou napjatost a nestlačitelný materiál, můžeme opět využít vztahu (3.13) a psát

$$\sigma = \frac{P \lambda_1}{A_0 \cdot B_o \cdot (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^2}, \quad (5.8)$$

Pro druhé Piola-Kirchhofovo napětí platí,

$$\mathbf{S}_{mer} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.9)$$

kde \mathbf{F} je deformační gradient, J je Jakobián deformace,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^{-0.5} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-0.5} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

po dosazení za σ a \mathbf{F} dostaneme výsledný vztah pro druhé Piola-Kirchhofovo napětí

$$\mathbf{S}_{mer}[1,1] = \frac{J \cdot P}{\lambda_1 \cdot A_0 \cdot B_o \cdot (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^2}, \quad (5.11)$$

J je definován (3.3) ve vztahu.

Rovnici pro rovnovážné napětí v modelu získáme dosazením (5.6), (3.3) a již známých parametrů do (3.18), levou stranu reprezentuje první člen matice (5.11). Postupným dosazováním získáme soustavu 24 rovnic. Bohužel vzorky se díky chemickým nepřesnostem chovají dosti odlišně, proto je nutno výpočet rozdělit a určit konstanty pro první 3 vzorky zvlášť. Výsledná soustava pro všechny teploty a vzorky (1-3) tedy nabývá tvaru.

$$S_{11mer n} = S^{\infty}(\lambda_{mer n}, \Theta_{mer n}) = \frac{\mu_0 + \mu_{\Theta} \left(1 - \frac{\Theta_0}{T_0}\right)}{\lambda^2} \left[\lambda^2 - \left(\frac{J}{\lambda}\right) \right], n = 1..12, \quad (5.12)$$

po aplikování metody lineárních nejmenších čtverců získáme hledané koeficienty.

μ_0 [MPa]	μ_{Θ} [MPa]	Θ_0 [K]	α [1/K]	c [J/kgK]
3,738	1,765	293	0.000018	1830

Tab. 15: Parametry neo-Hookeova modelu vzorek 1-3

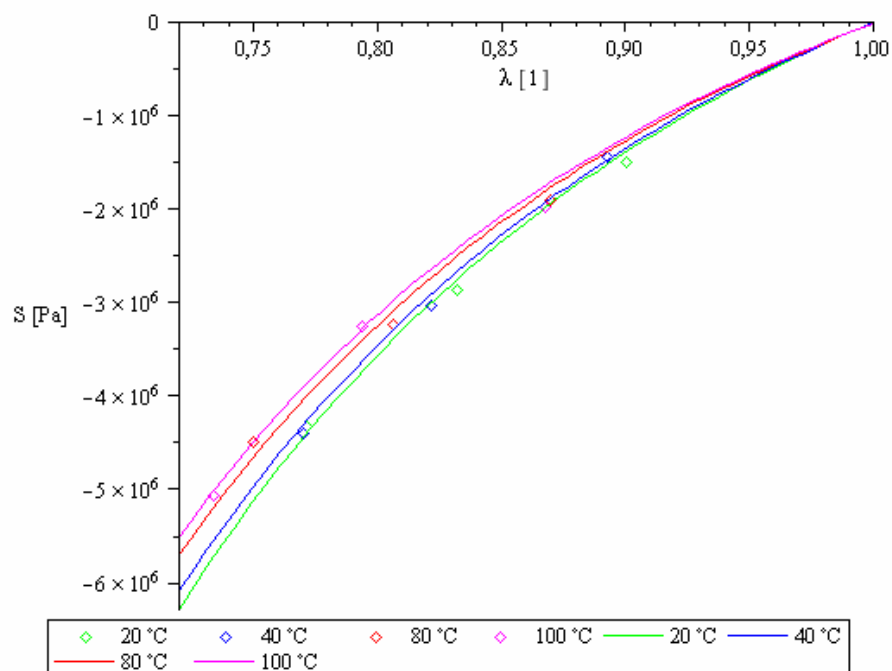
Stejný postup aplikujeme u vzorků 4-6 a dostaneme parametry shrnuté v Tab. 14.

μ_0 [Pa]	μ_{Θ} [Pa]	Θ_0 [K]	α [1/K]	c [J/kgK]
3,055	0,930	293	0.000018	1830

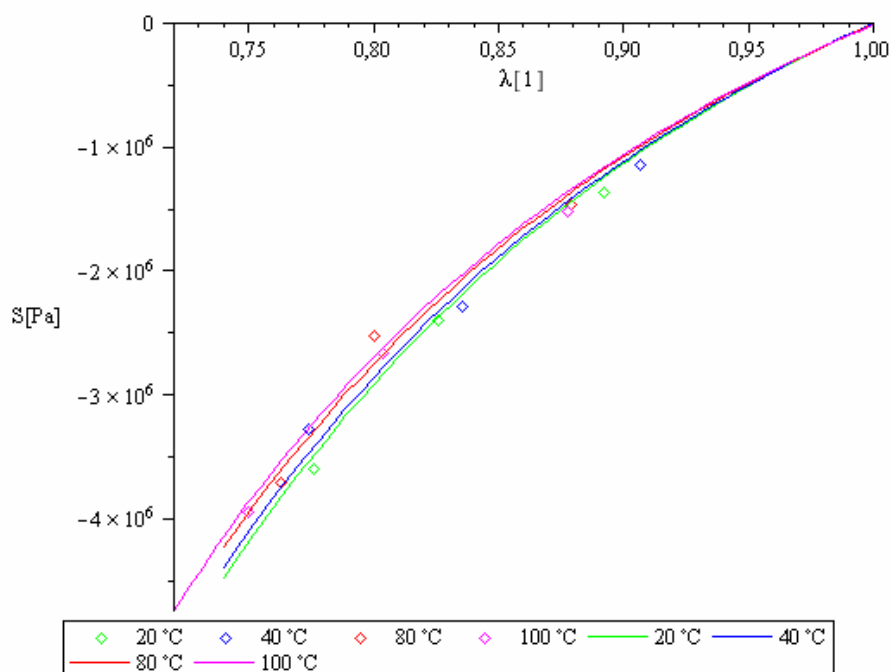
Tab. 16: Parametry neo-Hookeova modelu vzorek 4-6

Nyní máme určeny parametry neo-Hookeova modelu. Ačkoliv vzorky měly být ze stejného materiálu, zřejmě se nejedná o jednu výrobní várku, a tudíž jejich mechanické vlastnosti jsou mírně odlišné.

Následující grafy (Graf 36, Graf 37) zobrazují proložení hodnot křivkami. Barevné body vyznačují vždy různé stlačení pro jednu teplotu a křivka stejné barvy je jimi proložená.



Graf 36: Proložení naměřených hodnot křivkami N-H modelu vzorky 1-3.



Graf 37: Proložení naměřených hodnot křivkami N-H modelu vzorky 4-6.

Více o tomto modelu a postupu odvození jednoosé napjatosti lze dočíst v [15,17]

5.8 Určení parametrů reologického modelu

Při určování parametrů reologického modelu vycházíme z rovnice (3.29), která po operaci integrování a zvolení $n=3$ nabývá tento tvar

$$S = S_{iso}^{\infty} \left(1 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \beta_3 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_3}} \right), \quad (5.13)$$

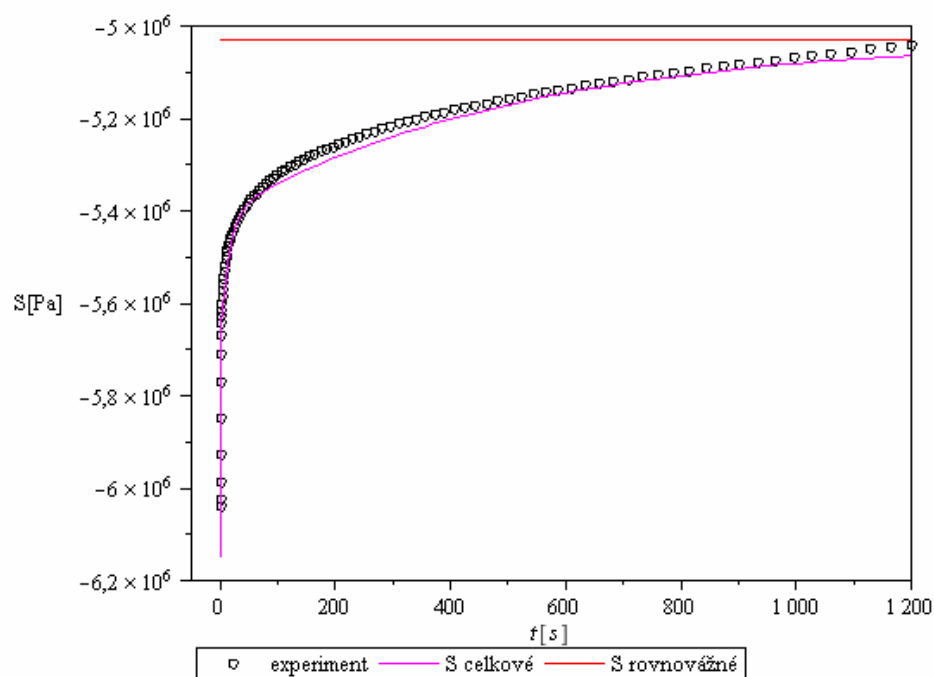
za S_{iso}^{∞} dosazujeme již přesně určenou (3.18), za S dosazujeme $S_{11mer n}$

Každé stlačení reprezentuje 100 rovnic. Je k dispozici 24 stlačení, takže výsledná soustava obsahuje celkem 24000 rovnic tvaru (5.13). Výsledné parametry po provedení nelineární regrese shrnuje Tab. 15.

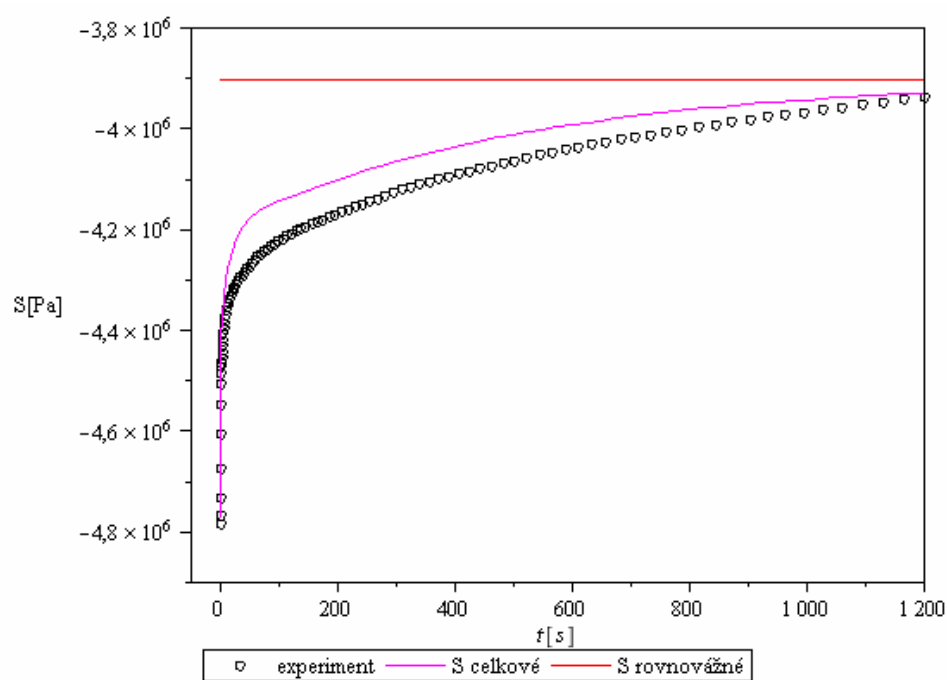
$\beta_1 [-]$	$\beta_2 [-]$	$\beta_3 [-]$	$\tau_1 [s]$	$\tau_2 [s]$	$\tau_3 [s]$
0.053763	0.075814	0.093249	14.8019	506.7789	0.227353

Tab. 17: Parametry reologického modelu

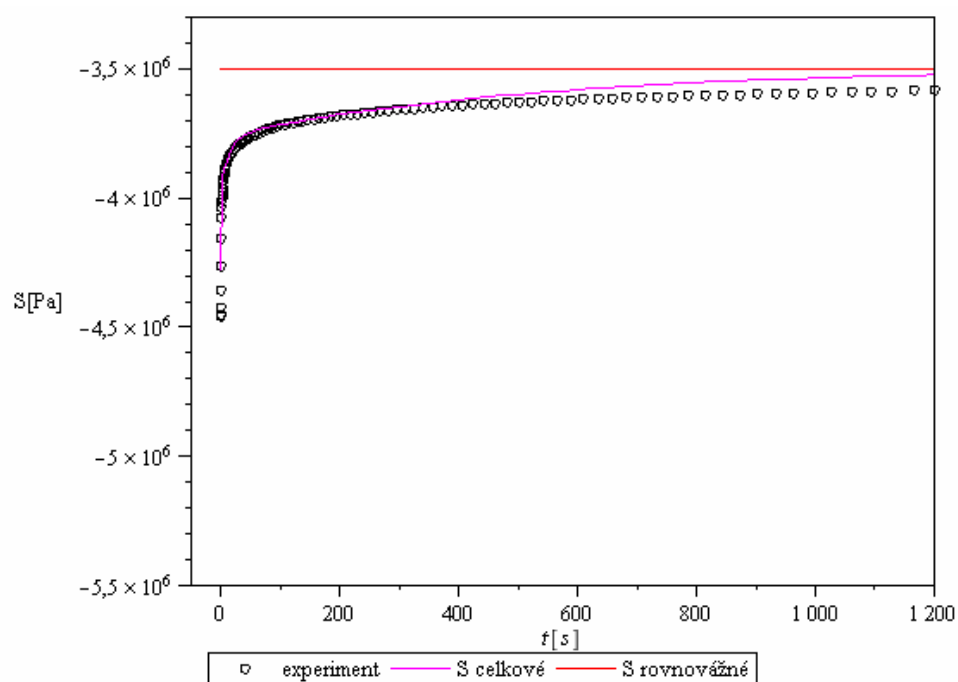
Na (Graf 38, Graf 39, Graf 40) můžeme pozorovat, že průběh relaxace se významně nemění s teplotou (v rozmezí 20-100°C), a tak nebylo nutné používat tzv. Shift funkce modifikující relaxační křivky v závislosti na teplotě.



Graf 38: Proložení průběhu relaxace za teploty 100 °C, vzorek 2



Graf 39: Proložení průběhu relaxace za teploty 100 °C, vzorek 6

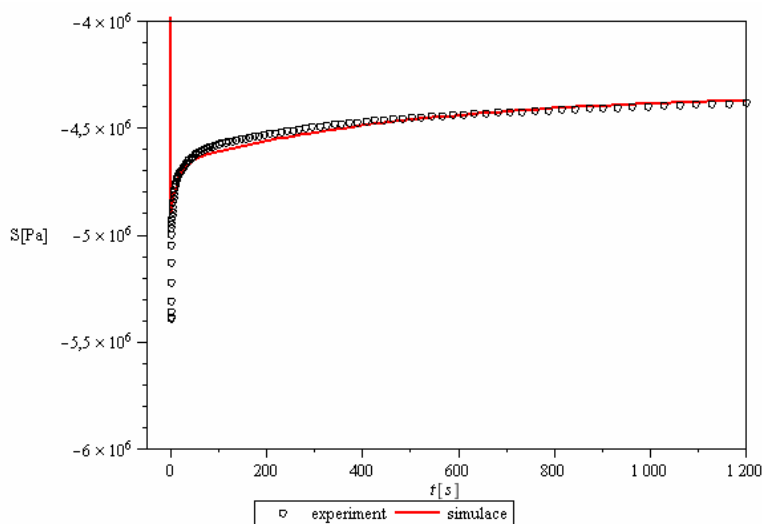


Graf 40: Proložení průběhu relaxace za teploty 20 °C, vzorek 6

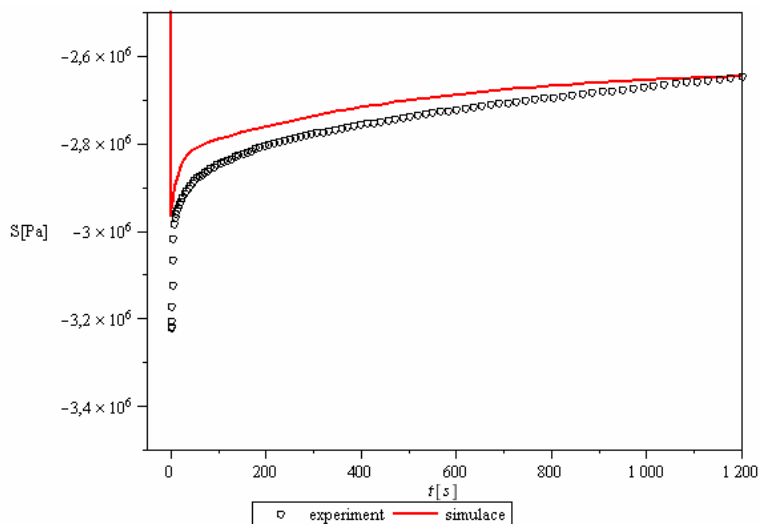
6 Simulace v MKP

6.1 Simulace v programu Maple 11

Numerický výpočet vychází z (3.29). Následující 2 obrázky ukazují, výsledky numerické simulace v porovnání s experimentálními výsledky. Program pro simulaci je obsažen v příloze C



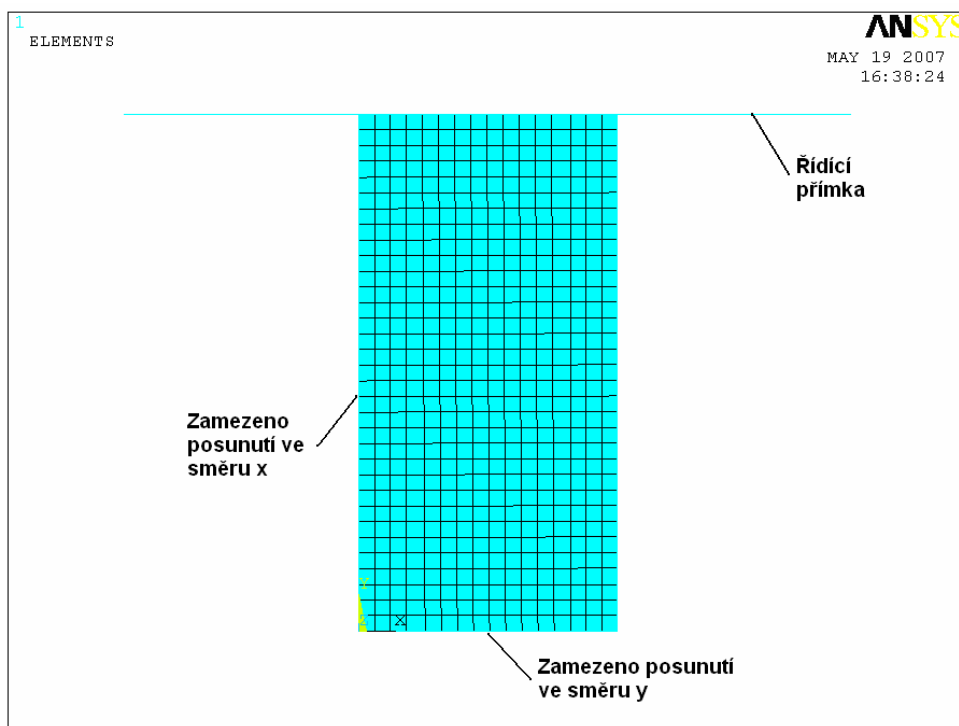
Graf 41: Simulace vzorku 4 za teploty 40°C



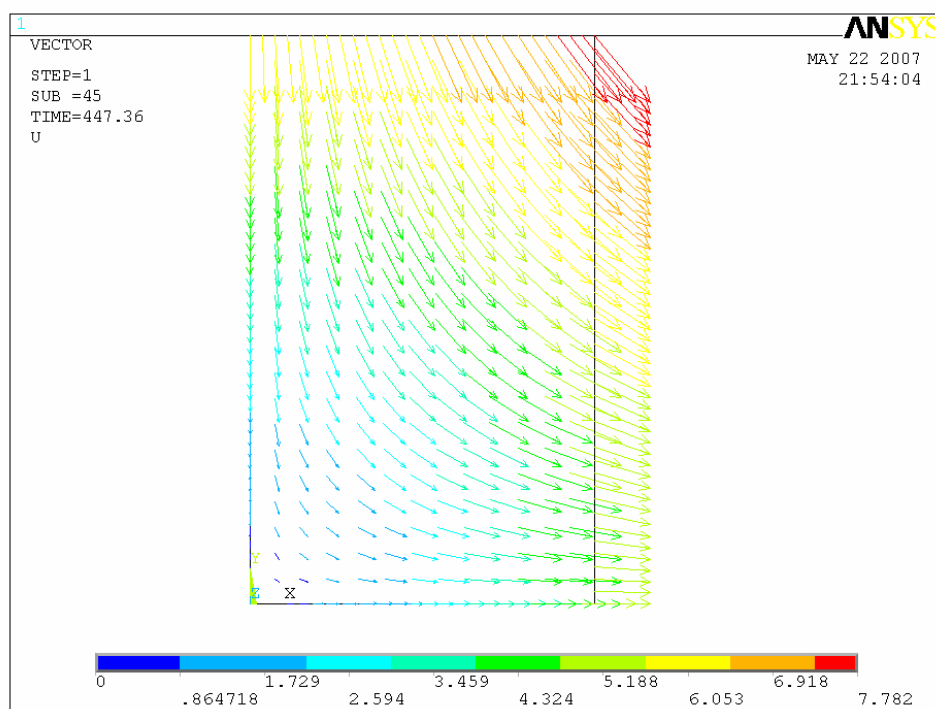
Graf 42: Simulace vzorku 5 za teploty 100°C

6.2 Simulace v programu ANSYS 10.0

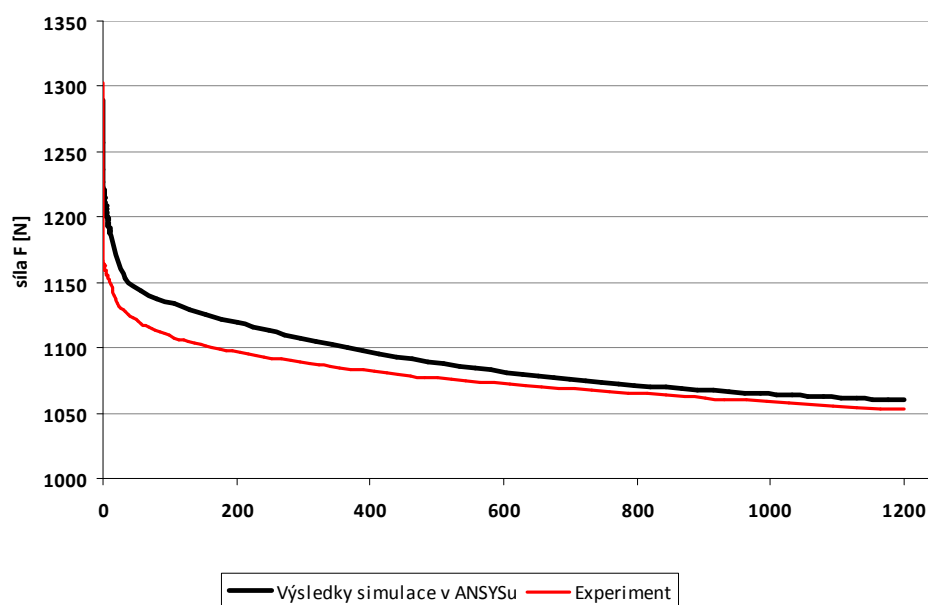
Byl aplikován PLANE 183 prvek s MIXED UP formulací a *rovinnou deformací*. ANSYS podporuje u hyperelastických materiálů zadání maximálně šesti různých teplot, avšak v manuálu není popsán způsob aproximace hodnot součinitelů mezi zadanými teplotami. Proto byla určená hodnota součinitelů přímo pro zkoušenou teplotu a ta vložena do ANSYSu. Bylo využito 2 os symetrie, pro další zjednodušení úlohy. Výsledný graf Reakční síly vznikl po vynásobení numericky simulované síly třetím rozměrem vzorku. pro simulaci byl zvolen vzorek 5 za teploty 100°C



Obr. 9: Zobrazení elementů a okrajových podmínek modelu



Obr. 10: Zobrazení vektorového pole celkového posunutí, vzorek 5, 100°C



Graf 43: Porovnání experimentu a simulace v prostředí ANSYS v10 (síla je tlaková)

7 Závěr

7.1 Zhodnocení dosažených výsledků

V práci je dosaženo těchto základních poznatků

- na základě experimentu je navržen lineární součinitel teplotní roztažnosti, který je možno aplikovat pro uvažované teplotní rozmezí.
- pomocí MKP je navrhuta doba nutná k úplnému prohřátí vzorku na testovací teplotu, a tato doba je ověřena v elektrické odporové peci.
- v experimentálních datech bylo pozorováno, že se zvyšující teplotou se modul pružnosti lineárně snižuje a pro tuto skutečnost byl navrhnut materiálový model, který tento vliv zahrnuje
- v experimentálním měření relaxace je pozorováno, že teplotní ovlivnění relaxačního času je za testovaných teplot velmi malé, proto není potřeba používat funkce časového posuvu u viskoelastického modelu. Tato skutečnost je zohledněna v navrženém reologickém modelu pryže.
- navržený model je numericky simulován pomocí prostředí MAPLE a ANSYS a výsledky porovnány s experimentálními daty.

7.2 Možnosti další práce

Dalším nutným krokem v přesnění modelu zkoumaného materiálu je navržení modelu, který zohledňuje závislost viskoelastických konstant na deformaci. Dále je nutné rozšířit počet měření, protože provedené měření může vypovídat pouze řádově o konstantách, nikoliv však přesně o jejich velikostech nebo dokonce jejich rozptylech.

Závislost síla – stlačení, je různá pro tah a tlak, proto je nutné rozšířit další zkoumání o tahovou oblast deformace, namáhání krutem je taktéž možnost k dalšímu zkoumání. Určení stlačitelnosti pomocí pýchovacího testu by umožnilo přejít od nestlačitelného modelu k stlačitelnému.

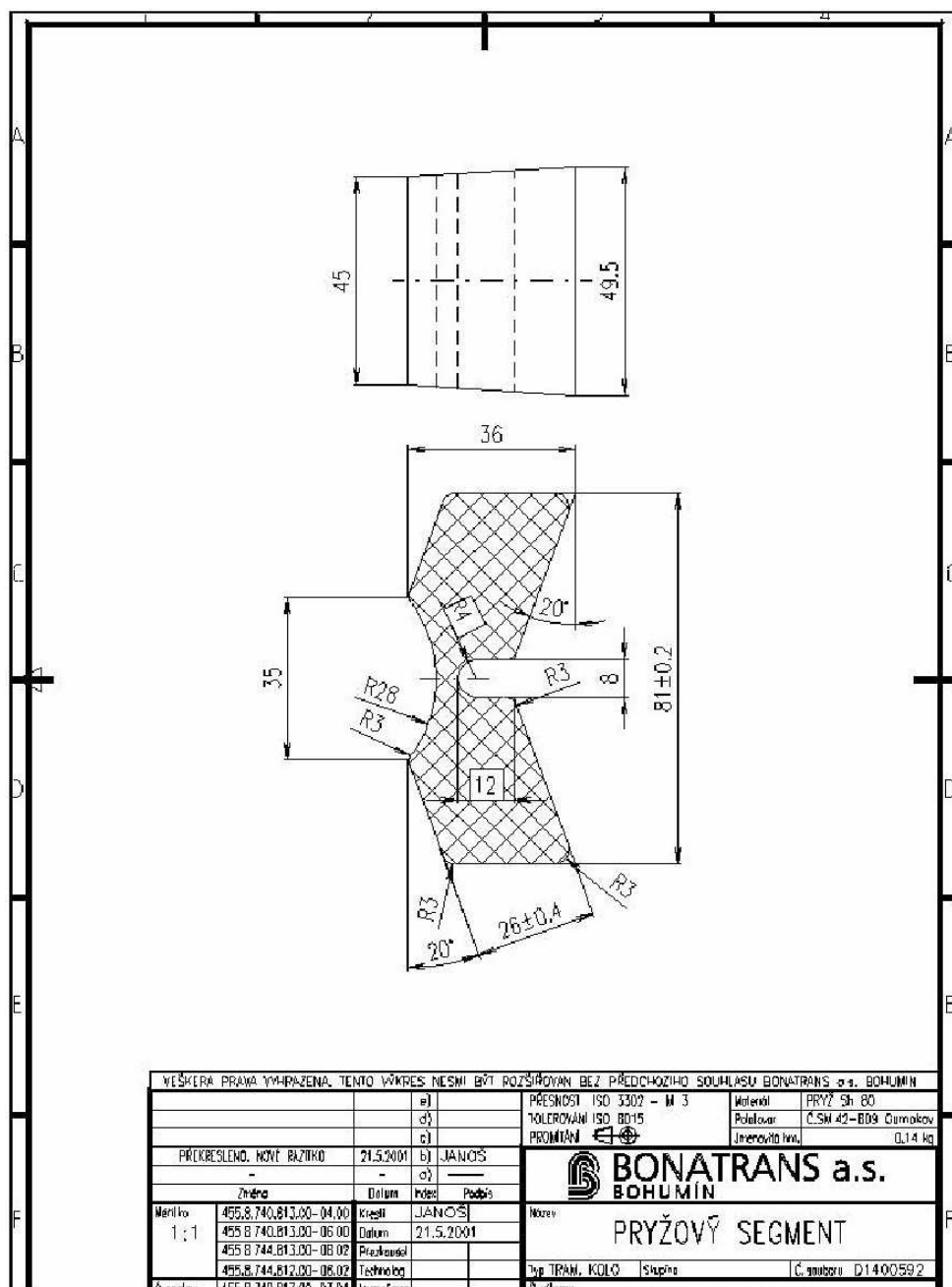
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Amin, A.F.M.S., Lion, A., Sekita, S., Okui, Y: Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubber in compression and shear: Experimental identification and numerical verification. International journal of plasticity, číslo 22, str. 1610-1657, 2006
- [2] Ronan, S., Alshuth, T., Jerrams, S., Murphy, N.: Long-term stress relaxation prediction for elastomers using the time-temperature superposition method. Materials and Design, 2006
- [3] Khan, A.S., Lopez- Pamies, O., Kazmi, R.: Thermo-mechanical large deformation response and constitutive modeling of viscoelastic polymers over a wide range of strain rates and temperatures. International Journal of Plasticity, 2005
- [4] Shaw, J.A., Jones, A.S., Wineman, A.S.: Chemorheological Response of Elastomers at Elevated Temperatures: Experiments and Simulations. 2005
- [5] Šesták, J., Rieger, F.: Přenos hybnosti tepla a hmoty. Vydavatelství ČVUT, 2004
- [6] Ogden, R.W., Saccomandi, G.: Mechanics and Thermodynamics of rubberlike solids. CISM, Udine 2004
- [7] Khan, A.S., Lopez- Pamies, O.: Time and temperature dependent response and relaxation of soft polymer. International Journal of Plasticity, číslo 33, str. 1359-1372, 2002
- [8] Bergström, J: Polymer Mechanics, Deformations, and failure of XLPE, 2002
- [9] Holzapfel, G.: Nonlinear Solid Mechanics. John Willey & sons, LTD, 2000.
- [10] Maršík, F.: Termodynamika kontinua, Academia Praha 1999
- [11] Saxena, N.S., and all., M.: Thermal conductivity of styrene butadiene rubber compounds with natural rubber prophylactics waste as filler. European Polymer Journal, číslo 35, str. 1687-1693, 1999
- [12] Okrouhlík, M.: Mechanika poddajných těles, numerická matematika a superpočítače. Ústav termomechaniky AV ČR, 1997
- [13] Holzapfel, G.: On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. International journal for numerical methods in engineering, číslo 39, str. 3903-3926, 1996
- [14] Holzapfel, G., Simo, J.C.: Entropy elasticity of isotropic rubber-like solids at finite strains. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, číslo 132, str. 17-44, 1996

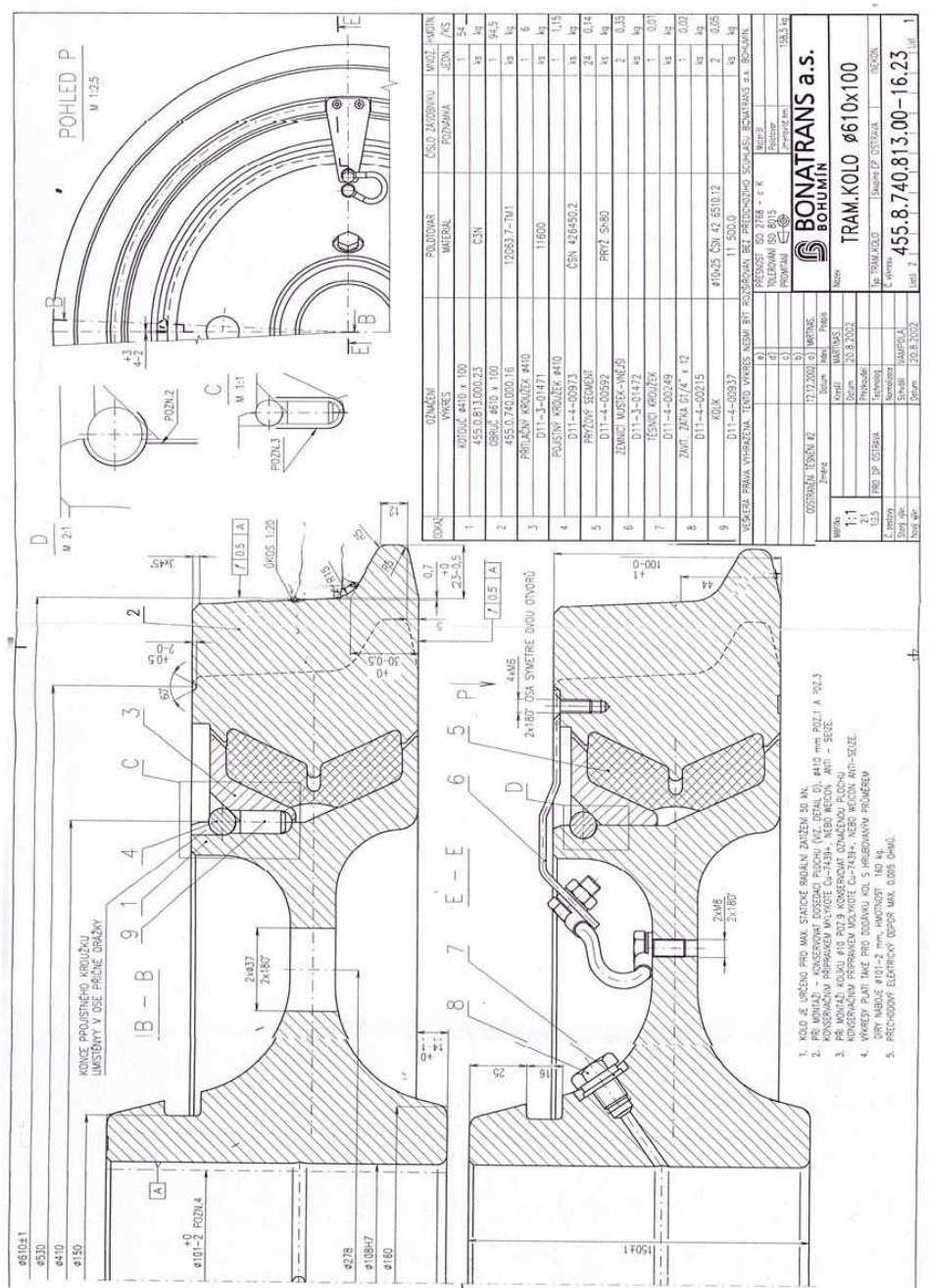
-
- [15] Holzapfel, G., Simo, J.C.: A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes. *Int. J. Solids Structures*, číslo 33, str. 3019-3034, 1996
 - [16] Treloar, L.R.G.: *The physics of Rubber Elasticity*. Oxford university press, Oxford 1975.
 - [17] Marvalová, B., Klouček, V., Růžička, J.: Measurement and identification of viscoelastic parameters of filled rubber.
 - [18] Košťál, P., a kolektiv, Quick fully automatic flash test od thermal properties of rubber blends. *Institute of material a technological research*. Department of Physical Engineering of Materials, Púchov, SK
 - [19] Williams, M. L., Landel, R. F., Ferry, J. D.: The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-Forming Liquids. *Journal of the American Chemical Society*, číslo 77, str. 3701, 1955
 - [20] Haberstroh, E., Grambow, A.: Application of the time-temperature shift principle to the material behaviour of rubber under high deformations. *Macromolecular Material Engineering*, číslo 284/285, str. 14-18, 2000
 - [21] Klouček, V.: Stanovení viskoelastických vlastností pryže BAE 8534 používané k výrobě segmentů pro odpružení tramvajových kol. *Diplomová práce*, TUL, 2006

PŘÍLOHY

A Výkresová dokumentace



Obr. 11: Výkres vibroizolačního segmentu



Obr. 12: Sestavení tramvajového kola

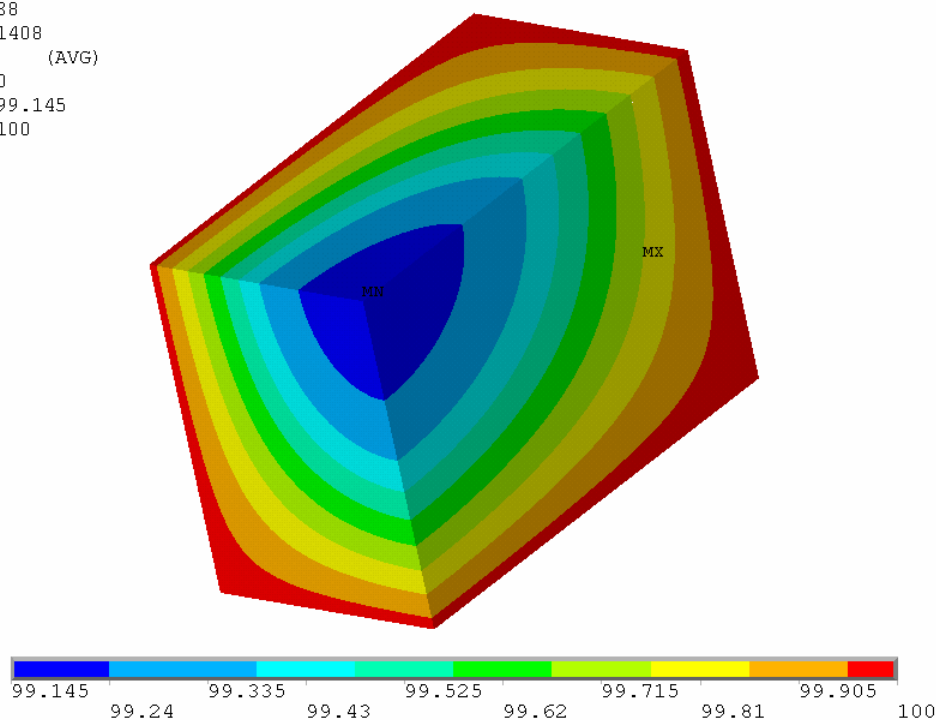
B Určení doby prohřátí

NODAL SOLUTION

STEP=1
SUB =38
TIME=1408
TEMP (AVG)
RSYS=0
SMN =99.145
SMX =100

ANSYS

MAY 18 2007
13:34:14



Obr. 13: model prohřátí po 1408 s v prostředí ANSYS

C Použité programy v MAPLE

C.1 Vyhlazení experimentální hodnot

restart;

with(linalg); with(ExcelTools); with(LinearAlgebra); with(plottools); with(plots);

with(FileTools); with(plottools); with(Optimization); infolevel[Optimization] := 4;

cestacti := "C:\\diplomka\\DATA2\\100celsia.xls";

ctihlava := "C:\\diplomka\\DATA2\\rozmary.xls";

```

HLAVA := Import(ctihlava, "HLAVA");
cestazapis := "C:\\diplomka\\DATA2\\100aprox.xls";
T := 100; i := 4; LIST := convert(i, string);
Data := Import(cestacti, LIST);
prvni := A1*exp(-B1*t)+C1*exp(-D1*t)+E1*exp(-F1*t);
HODNOT1 := 300;
    for j to HODNOT1+100 do
        EQ1[j] := eval(prvni, t = Data[j, 5])-Data[j, 2]
    end do;
lst1 := [seq(EQ1[p], p = 1 .. HODNOT1+100)];
res1 := LSSolve(lst1, initialpoint = {D1 = 1.29800573927271734, E1 =
116.62002794814157, B1 = 0.368131144867813506e-1, C1 = 46.472153958355250,
A1 = 62.702809773753415, F1 = .3}, {A1+C1+E1 = Data[1, 2]}, assume =
nonnegative, iterationlimit = 10000); assign(res1[2]);
druhy := A2*exp(-B2*t)+C2*exp(-D2*t)+E2*exp(-F2*t);
HODNOT2 := 4000;
    for j from HODNOT1-100 to HODNOT2+500 do
        EQ2[j] := eval(druhy, t = Data[j, 5])-Data[j, 2]
    end do;
lst2 := [seq(EQ2[p], p = HODNOT1-100 .. HODNOT2+500)];
res2 := LSSolve(lst2, initialpoint = {E2 = A1, D2 = D1, B2 = B1, C2 = C1, F2 = F1, A2
= A1}, assume = nonnegative, iterationlimit = 500); assign(res2[2]);
treti := A3*exp(-B3*t)+C3*exp(-D3*t)+E3*exp(-F3*t);
HODNOT3 := 15700;
    for j from HODNOT2-500 to HODNOT3 do
        EQ3[j] := eval(treti, t = Data[j, 5])-Data[j, 2]
    end do;
lst3 := [seq(EQ3[p], p = HODNOT2-500 .. HODNOT3)];
res3 := LSSolve(lst3, initialpoint = {D3 = D2, B3 = B2, C3 = C2, F3 = F2, A3 = A2, E3
= E2}, assume = nonnegative, iterationlimit = 500); assign(res3[2]);
Zlom0 := Data[HODNOT1-50, 5]; Zlom1 := Data[HODNOT1, 5];
Zlom2 := Data[HODNOT2-500, 5]; Zlom3 := Data[HODNOT2, 5];
aprox1 := plot(prvni, t = 0 .. Zlom1, colour = red); aprox2 := plot(druhy, t = Zlom0 ..
Zlom3, colour = green); aprox3 := plot(treti, t = Zlom2 .. 1200, colour = magenta);

```

```

for n to HODNOT3 do
  pl[n] := point([Data[n, 5], Data[n, 2]], symbol = circle, transparency = .995)
end do;
cele := display(['$(pl[ng], ng = 1 .. HODNOT3)']);
display({cele, aprox3, aprox2, aprox1}, view = [0 .. 1200, 800 .. 1600], labels = ["cas t
[s]", "sila F [N]"], labeldirections = [horizontal, vertical]);
APROX := piecewise(t < Zlom1, prvni, t < Zlom3, druhy, treti);
plot(APROX, t = 0 .. 1200);
vystuprel := rtable(1 .. 101, 1 .. 3);
vystuprel[1, 1] := "cas"; vystuprel[1, 2] := "sila"; vystuprel[1, 3] := "stlaceni";
  for p from 0 to 99 do
    cas := evalf(1200*p^2/99^2); vystuprel[p+1, 1] := cas;
    vystuprel[p+1, 2] := eval(APROX, t = cas);
    vystuprel[p+1, 3] := Data[6000, 7]
  end do;
Export(vystuprel, cestazapis, LIST, "A1");
for q to 100 do pl[q] := point([vystuprel[q, 1], vystuprel[q, 2]], symbol = circle,
transparency = 0) end do;
cele2 := display(['$(pl[ng], ng = 1 .. 100)']); display(cele2, view = [0 .. 1200, 800 ..
1600], labels = ["cas t [s]", "sila F [N]"], labeldirections = [horizontal, vertical]);

```

C.3 Výpočet konstant pro rovnovážné napětí vzorky 1,2,3

```

restart;
with(linalg); with(ExcelTools); with(LinearAlgebra); with(plottools); with(plots);
with(FileTools); with(plottools); with(Optimization); infolevel[Optimization] := 4;

cestacti := "d:\\diplomka\\DATA2\\rovnovazne.xls";
cestazapis := "d:\\diplomka\\DATA2\\NHkonstanty_tepl.xls";
teplo20 := 20; teplo40 := 40; teplo80 := 80; teplo100 := 100;
T20 := teplo20+273; T40 := teplo40+273; T80 := teplo80+273; T100 := teplo100+273;
tepl20 := convert(teplo20, string); tepl40 := convert(teplo40, string); tepl80 :=
convert(teplo80, string); tepl100 := convert(teplo100, string);
ctihlava := "d:\\diplomka\\DATA2\\rozmery.xls";
roz := Import(ctihlava, "HLAVA");

```

```
data20 := Import(cestacti, "20"); data40 := Import(cestacti, "40"); data80 :=
Import(cestacti, "80"); data100 := Import(cestacti, "100");
```

```
PSIcko := (1/2)*Ny1*(lambda^2+2*(J/lambda)^1-3)+c*(T-Tref-T*ln(T/Tref));
Ny1 := Puvod+Smer*(1-(T)/Tref);
P := simplify((diff(PSIcko, lambda))/lambda);
Nap := <<|>`(<<,>`(-Sila*lambda[1]/(plocha0*(1+alpha*(T-Tref))^2), 0, 0), <<,>`(0, 0,
0), <<,>`(0, 0, 0));
F := <<|>`(<<,>`(lambda[1], 0, 0), <<,>`(0, lambda[2], 0), <<,>`(0, 0, lambda[3]));
S := evalm(`(<`(`(J*inverse(F), Nap), inverse(transpose(F))));
S11 := S[1, 1];
Kor:=(0.153435980982269e-3*Sila-0.578060557211637e-
7*Sila^2.+0.175749188029677e-10*Sila^3-0.313994622064025e-
14*Sila^4.+0.353885868095007e-18*Sila^5.-0.263590205215528e-
22*Sila^6.+0.132936836913191e-26*Sila^7.-0.456334507507641e-
31*Sila^8.+0.105021400526873e-35*Sila^9.-0.155034257523354e-
40*Sila^10.+0.132653292937694e-45*Sila^11.-0.500136532354771e-
51*Sila^12)*1/1000;
lam := (-u+alpha*(T-Tref)*L+Kor)/L+1;
alpha := 0.18e-4; c := 1830; Tref := 20+273; J := 1+3*alpha*(T-Tref);
  for i to 3 do
    lam20[i] := eval(lam, [u = data20[i, 4], T = T20, L = roz[i+1, 2], Sila = data20[i,
2]]);
    S20[i] := eval(S11, [Sila = data20[i, 2], lambda[1] = lam20[i], plocha0 =
roz[i+1, 3]*roz[i+1, 4], T = T20]);
    EQ[i] := eval(P, [T = T20, lambda = lam20[i]])-S20[i]
  end do;

  for i to 3 do
    lam40[i] := eval(lam, [u = data40[i, 4], T = T40, L = roz[i+1, 2], Sila = data40[i, 2]]);
    S40[i] := eval(S11, [Sila = data40[i, 2], lambda[1] = lam40[i], plocha0 = roz[i+1,
3]*roz[i+1, 4], T = T40]);
    EQ[i+6] := eval(P, [T = T40, lambda = lam40[i]])-S40[i]
  end do;
```

```

for i to 3 do
  lam80[i] := eval(lam, [u = data80[i, 4], T = T80, L = roz[i+1, 2], Sila = data80[i,
  2]]);
  S80[i] := eval(S11, [Sila = data80[i, 2], lambda[1] = lam80[i], plocha0 =
  roz[i+1, 3]*roz[i+1, 4], T = T80]);
  EQ[i+12] := eval(P, [T = T80, lambda = lam80[i]])-S80[i] end do;
for i to 3 do
  lam100[i] := eval(lam, [u = data100[i, 4], T = T100, L = roz[i+1, 2], Sila = data100[i,
  2]]);
  S100[i] := eval(S11, [Sila = data100[i, 2], lambda[1] = lam100[i], plocha0 = roz[i+1,
  3]*roz[i+1, 4], T = T100]);
  EQ[i+18] := eval(P, [T = T100, lambda = lam100[i]])-S100[i]
end do;

lst := [seq(EQ[j], j = 1 .. 24)];
res:=LSSolve(lst, assume = nonnegative, initialpoint = {Smer = 6374.61230679035544,
Puvod = 3.692*10^6})

```

C.4 Výpočet konstant viskoelastických konstant

```

restart;
with(linalg); with(ExcelTools); with(LinearAlgebra); with(plottools); with(plots);
with(FileTools); with(plottools); with(Optimization); infolevel[Optimization] := 4;

ctikonst := "d:\\diplomka\\DATA2\\NHkonstanty_templ.xls";
cestacti20:="d:\\diplomka\\DATA2\\20aprox.xls";cestacti40:=
d:\\diplomka\\DATA2\\40aprox.xls";cestacti80:= "d:\\diplomka\\DATA2\\80aprox.xls";
cestacti100 := "d:\\diplomka\\DATA2\\100aprox.xls";
cestazapis := "d:\\diplomka\\DATA2\\NHkonstanty_templ.xls";
teplo20 := 20; teplo40 := 40; teplo80 := 80; teplo100 := 100;
T20 := teplo20+273; T40 := teplo40+273; T80 := teplo80+273; T100 := teplo100+273;
tepl20 := convert(teplo20, string); tepl40 := convert(teplo40, string); tepl80 :=
convert(teplo80, string); tepl100 := convert(teplo100, string);
ctihlava := "d:\\diplomka\\DATA2\\rozmery.xls";
roz := Import(ctihlava, "HLAVA");

```

```

KONSTM := Import(ctikonst, "NHkonstanty");
KONSTV := Import(ctikonst, "NHkonstantyV");
KONSTR := Import(ctikonst, "relaxace");

data20[2] := Import(cestacti20, "2"); data20[3] := Import(cestacti20, "3"); data20[4] :=
Import(cestacti20, "4"); data20[6] := Import(cestacti20, "6"); data20[7] :=
Import(cestacti20, "7"); data20[5] := Import(cestacti20, "5");
data40[2] := Import(cestacti40, "2"); data40[3] := Import(cestacti40, "3"); data40[4] :=
Import(cestacti40, "4"); data40[6] := Import(cestacti40, "6"); data40[7] :=
Import(cestacti40, "7"); data40[5] := Import(cestacti40, "5");
data80[2] := Import(cestacti80, "2"); data80[3] := Import(cestacti80, "3"); data80[4] :=
Import(cestacti80, "4"); data80[6] := Import(cestacti80, "6"); data80[7] :=
Import(cestacti80, "7"); data80[5] := Import(cestacti80, "5");
data100[2] := Import(cestacti100, "2"); data100[3] := Import(cestacti100, "3");
data100[4] := Import(cestacti100, "4"); data100[6] := Import(cestacti100, "6");
data100[7] := Import(cestacti100, "7"); data100[5] := Import(cestacti100, "5");

PSIcko := (1/2)*nyl*(lambda^2+2*(J/lambda)^1-3)+c*(T-Tref-T*ln(T/Tref));
nyl := Smer*(1-T/Tef)+Puvod;
P := (diff(PSIcko, lambda))/lambda;
Nap := `<|>`(`<,>`(-Sila*lambda[1]/(plocha0*(1+alpha*(T-Tref))^2), 0, 0), `<,>`(0, 0,
0), `<,>`(0, 0, 0));
F := `<|>`(`<,>`(lambda[1], 0, 0), `<,>`(0, lambda[2], 0), `<,>`(0, 0, lambda[3]));
S := evalm(`(`(`(J*inverse(F), Nap), inverse(transpose(F))));
S11 := S[1, 1];
Kor:=(0.153435980982269e-3*Sila-0.578060557211637e-
7*Sila^2.+0.175749188029677e-10*Sila^3-0.313994622064025e-
14*Sila^4.+0.353885868095007e-18*Sila^5.-0.263590205215528e-
22*Sila^6.+0.132936836913191e-26*Sila^7.-0.456334507507641e-
31*Sila^8.+0.105021400526873e-35*Sila^9.-0.155034257523354e-
40*Sila^10.+0.132653292937694e-45*Sila^11.-0.500136532354771e-
51*Sila^12)*1/1000;
lam := (-1/1000)*u+alpha*(T-Tref)*L+Kor)/L+1;
J := 1+3*alpha*(T-Tref);

```

```

Sover := P*(beta[1]*exp(-t/Tau[1])+beta[2]*exp(-t/Tau[2])+beta[3]*exp(-t/Tau[3]));
Napcelk := P+Sover;
KONST; alpha := KONSTM[2, 4]; c := KONSTM[2, 5]; Tref := KONSTM[2, 3]; Smer
:= KONSTM[2, 1]; Puvod := KONSTM[2, 2];
Ts := 243;
  for q from 1 to 6 do
    for i to 100 do
      lam20[q][i] := eval(lam, [u = data20[q][i, 3], T = T20, L = roz[q, 2], Sila
= data20[q][100, 2]]);
      S20[q][i] := eval(S11, [Sila = data20[q][i, 2], lambda[1] = lam20[q][i],
plocha0 = roz[q, 3]*roz[q, 4], T = T20))
    end do
  end do;
for q from 1 to 6 do
  for i to 100 do
    lam40[q][i] := eval(lam, [u = data40[q][i, 3], T = T40, L = roz[q, 2], Sila =
data40[q][100, 2]]);
    S40[q][i] := eval(S11, [Sila = data40[q][i, 2], lambda[1] = lam40[q][i], plocha0
= roz[q, 3]*roz[q, 4], T = T40));
    EQ[i+600] := eval(Napcelk, [T = T40, lambda = lam40[q][i], t = data40[q][i,
1]])-S40[q][i]
  end do
end do;

```

Cyklus se opakuje pro každou teplotu (zde je vypuštěn)

```

lst := [seq(EQ[j], j = 1 .. 2400)];
res := LSSolve(lst, initialpoint = {Tau[3] = .227353116286326150, Tau[2] =
506.778880773473020, beta[2] = 0.758144566337050490e-1, beta[1] =
0.537625866523349234e-1, Tau[1] = 14.8018987239532596, beta[3] =
0.932485633692399369e-1}, assume = nonnegative, iterationlimit = 30000);
assign(res[2]);

```

C.4 simulace modelu

Příklad pro vzorek 4 za teploty 40 program se vloží na konec minulého, nebo se do vstupu programu musí zadat konstitutivní rovnice a konstanty

```
alpha := KONSTM[2, 4]; c := KONSTM[2, 5]; Tref := KONSTM[2, 3]; Smer :=
KONSTM[2, 1]; Puvod := KONSTM[2, 2];
lambda := 1-(1-lam40[4][10])*Heaviside(t-0.1e-4);
T := T40;
simplify(P); DP := simplify(diff(P, t));
DP := -4.335977759*10^6*Dirac(t-0.1000000000e-4);
Q := int((beta[1]*exp(-(t-CAS)/Tau[1])+beta[2]*exp(-(t-CAS)/Tau[2])+beta[3]*exp(-(t-
CAS)/Tau[3]))*(eval(DP, t = CAS)), CAS = 0 .. t);
Scelk := Q+P;
ScelkT := simplify(eval(Scelk, T = T40));
simpplify(Napcelk);
Sko := plot(ScelkT, t = 0.1e-6 .. 1200, thickness = 2); plot(ScelkT, t = 0.1e-6 .. 1200,
thickness = 2, numpoints = 10000);
display(Sko, cele40[4], view = [-50 .. 1200, -4000000 .. -6000000], axes = boxed);
```